2011年度版電磁気学4講義概要

京都大学物質-細胞システム拠点 教授 田中耕一郎

目 次

1　真空中の Maxwell 方程式

1.1　真空中の Maxwell 方程式と積分形の法則

MKSA $1/\mu_0\epsilon_0 = c^2$
基本的な場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.1}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.3}$$
$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

♣ (1.1)、(1.3) は Gauss の法則

例.1　　　真空中の点電荷による電場
(1.1) を点電荷で囲む体積で積分

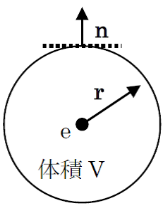
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{e}{\epsilon_0}$$

積分型の Gauss の定理

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{e}{\epsilon_0}$$

ここで A は V を取り囲む閉曲面。球面の場合は面に垂直なベクトルは $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$（対称性から）となる。このとき、

$$4\pi r^2 |\mathbf{E}| = \frac{e}{\epsilon_0}$$
$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r^2}$$
$$\text{or } \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r^2}\mathbf{e_r}. \tag{1.5}$$

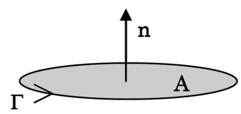


例.2　　　(1.3) はモノポール（単磁極）が無いという証拠.

♣ 定常電流の場合のアンペールの法則
例.3　　　電流 $\boldsymbol{j}$ が流れている長い電線の外部の磁場は (1.4) で $\partial\mathbf{E}/\partial\mathbf{t} = \mathbf{0}$ とおいたものより求まる.
→ アンペールの法則
対称性の点から $\mathbf{B}$ は軸対称

(1.4) より

$$
\begin{aligned}
&c^2\int_A \nabla\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dA = \int_A \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}\cdot\mathbf{n}dA \\
&c^2\int_\Gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\epsilon_0} \qquad (I := \int_A \boldsymbol{j}\cdot\mathbf{n}dA) \\
&c^2\,|\mathbf{B}|\,2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0} \\
&|\mathbf{B}| = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2}\frac{I}{r} \qquad (1.6) \\
&\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{2\mathbf{I}\times\mathbf{e_r}}{r} \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$



♣ 誘導法則. ファラデーの法則.
(1.2) より

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\
&\int_A \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dA = -\int_A \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}dA = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (1.8) \\
&\Phi := \int_A \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dA \qquad (\text{A を通る磁束})
\end{aligned}
$$

閉回路を貫く磁束が時間変化すると起電力が生じる。

1.2 Maxwell の予想と電荷の連続の式

元々の方程式のアンペールの式 (1.4) には $\partial\mathbf{E}/\partial t$ の項が無かった。

$$c^2\nabla\times\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}$$

これにはおかしい点がある。

$$\nabla\cdot(c^2\nabla\times\mathbf{B}) = \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} = 0 \qquad (\mathrm{div}\cdot\mathrm{rot}\ \text{は常に}\ 0)$$

これは任意の閉曲面を貫く電流の総和が 0 に成ることを意味し、おかしい。電荷はあちこち動くため閉曲面内部から電荷が無くなるような場合には明らかに $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$ は成り立たない。もし電荷が保存するのならば、連続の式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (1.9)$$

が成り立つべきである。これは ” 流れ ” と ” 源 ” の間に成り立つ局所的保存則の 1 つである。Maxwell はアンペールの法則を下の様に $\partial\mathbf{E}/\partial t$ を付け加えるように提案した。

$$c^2\nabla\times\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \to\ c^2\nabla\times\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

両辺の div をとると

$$0 = \frac{\nabla \boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E})$$

(1.1) の Gauss の法則より

$$\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.10}$$

♣ アンペールの法則に加わった新しい項の効果.

例 4.　　　$\rho = 0$、$\boldsymbol{j} = 0$ の場合の Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{1.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.12}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.13}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.14}$$

源が無くても $\mathbf{E}$ の変化が $\mathbf{B}$ の rot を生み出し、それの変化がさらに $\mathbf{E}$ の rot を生み出す。

誘電率の法則からスタートする.

$$(1.12) \;\to\; \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

両辺の（$\nabla \times$　　）をとると、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \tag{1.15}$$

ここで

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{1.16}$$

を用いた。(1.15) 式右辺はアンペールの法則により新たに付け加わった項 ((1.14) 式右辺) の効果である。Gauss の法則 (1.11) より左辺第一項は消えるので (1.15) 式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \tag{1.17}$$

と波動方程式の形と成り、源が存在しなくても自立的に振動し伝搬し続ける。
$\to$ 電磁波
平面波解 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$

1.3 Maxwell 方程式のフーリエ成分表示

真空中の Maxwell 方程式 $\rho=0$、$\boldsymbol{j}=0$ の場合

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}=0 \tag{1.18}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.19}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{1.20}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.21}$$

場をフーリエ成分で書く（平面波に分解する)。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega \\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k},\omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega
\end{aligned}$$

これらを (1.18) - (1.21) に代入する事を考える.

◇ 時間微分

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\sim d^3\mathbf{k}d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)(-i\omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega
\end{aligned}$$

ただし、1 行目から 2 行目への等号では微分と積分の順序の交換を行った。

◇ 空間微分.

時間微分の場合と同様に微分と積分の順序の交換を行うと,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}_x(\mathbf{r},t) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\sim d^3\mathbf{k}d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial}{\partial x}e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k},\omega)(ik_x)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega \\
\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{E}_x(\mathbf{r},t) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\sim d^3\mathbf{k}d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k},\omega)(ik_y)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega \\
(\nabla\times\mathbf{E})_x &= \frac{\partial\mathbf{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathbf{E}_y}{\partial z} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\{i\mathbf{k}_y\tilde{\mathbf{E}}_z(\mathbf{k},\omega)-i\mathbf{k}_z\tilde{\mathbf{E}}_y\}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int i(\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}})_x e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega \\
\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int i(\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega
\end{aligned}$$

これらを Maxwell 方程式に代入して

$$\int i(\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega = 0$$
$$\int i\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega = -\int(-i\omega)\tilde{\mathbf{B}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$
$$\int i(\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{B}})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega = 0$$
$$c^2\int i\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{B}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega = \int(-i\omega)\tilde{\mathbf{E}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$

これらは任意の $\mathbf{r}$, t で成立するから、$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ の係数は 0 に成らなければならない。

$$\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega) = 0 \tag{1.22}$$
$$\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega) - \omega\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k},\omega) = 0 \tag{1.23}$$
$$\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k},\omega) = 0 \tag{1.24}$$
$$c^2\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k},\omega) + \omega\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega) = 0 \tag{1.25}$$

① (1.22)、(1.24) から $\tilde{\mathbf{E}}$、$\tilde{\mathbf{B}}$ は波数 $\mathbf{k}$ に垂直（横波）。

② (1.23) に左から $\mathbf{k}\times$ をかけて

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}) - \omega\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{B}} = 0$$
$$\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\mathbf{E}} = 0 \qquad (\because (1.25))$$
$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2\right)\tilde{\mathbf{E}} = 0$$

これより、$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega) \neq 0$ であれば $\rightarrow$

$$\omega = c|\mathbf{k}| \qquad \text{分散関係式} \tag{1.26}$$

③ (1.23) より

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}\times\tilde{\mathbf{E}} \tag{1.27}$$

故に、$\tilde{\mathbf{E}}\cdot\tilde{\mathbf{B}} = 0 \ \rightarrow\ \tilde{\mathbf{E}}$ と $\tilde{\mathbf{B}}$ は垂直

$\mathbf{k}$ と $\tilde{\mathbf{E}}$ と $\tilde{\mathbf{B}}$ は互いに垂直（平面波解）。この時、分散関係 $\omega = c|\mathbf{k}|$ を考慮すると、

$$|\tilde{\mathbf{B}}| = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega}|\tilde{\mathbf{E}}| = \frac{1}{c}|\tilde{\mathbf{E}}| \tag{1.28}$$

1.4 スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル —真空中の Maxwell 方程式のポテンシャルを用いた書き換え—

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \tag{1.29}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.30}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.32}$$

Tips ! 任意のベクトル $\mathbf{A}$、およびスカラー ϕ に対して、

恒等式 $$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{1.33}$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \tag{1.34}$$

ρ、$\mathbf{j}$ などの湧き出し（源）が存在する場合には、前回に波動方程式を出したように、簡単な場に関する微分方程式を導けない。そこで場をポテンシャルによってあらわして、ポテンシャルの満たすべき微分方程式を考える。

1$^{\mathrm{st}}$ step

（1.31）より出発。（1.33）より

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.35}$$

の様にベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を定義する。$\mathbf{A}$ は下記のような不定性がある。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \qquad \text{ゲージ不定性} \tag{1.36}$$

ここで χ は任意のスカラーである。

2$^{\mathrm{nd}}$ step

（1.30）のファラデーの法則に（1.35）を代入

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

(1.34）より、$\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t=-\nabla\phi$ のようなスカラーポテンシャル ϕ が定義でき、

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.37}$$

と表せる。

（1.37）で（1.36）の不定性を考えると、

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}'-\nabla\chi\\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)\\ &= -\nabla\left(\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\\ &= -\nabla\phi'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\end{aligned} \tag{1.38}$$

と（1.37）と同じ形式の式と成る。ただし、

$$\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{1.39}$$

とした。これより、(1.36)、(1.39）の変換に対して $\mathbf{B}$、$\mathbf{E}$ が不変である事が解る。この変換

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\chi \tag{1.40}$$

$$\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{1.41}$$

をゲージ変換と呼ぶ。

Tips !　ところで χ はどんなスカラー関数でも良いのだろうか?。$\nabla\cdot\mathbf{A}'=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla^2\chi$ から、$\mathbf{A}$ の発散を利用して決定する事が多い。$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ をクーロンゲージとよぶ。

3rd step

これまで二つの式から

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{1.42}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.43}$$

と書けた。残りの２式から $\mathbf{A}$ と ϕ が満たす微分方程式を求めればよい。

Gauss の法則（1.29）より

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}=0\\ \nabla\cdot\left(-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ -\nabla^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned} \tag{1.44}$$

4$^{\text{th}}$ step

Ampere の法則（1.32）より

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$c^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}$$

$$c^2\left(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}\right)=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}$$

ここで適当なゲージ変換をおこなって、$\mathbf{A}$ と ϕ が

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad \text{ローレンツゲージ} \tag{1.45}$$

となる様にする。

ローレンツゲージをみたす（1.40）、（1.41）の χ はどのような方程式をみたすか？

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\chi$$

$$\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

ローレンツゲージの条件（1.45）の左辺にゲージ変換を代入。

$$\nabla\mathbf{A}'-\nabla^2\chi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi=0$$

$\mathbf{A}'$ と ϕ' はローレンツゲージの条件を満たすとすると、

$$\nabla^2\chi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi=0 \tag{1.46}$$

の場合にもとの $\mathbf{A}$ と ϕ もローレンツゲージの条件を満たすことになる。即ち、波動方程式をみたす χ が必要である。

Gauss の法則と Ampere の法則から下記のポテンシャルに関する微分方程式が得られる。

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.47}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}=-\frac{\boldsymbol{j}}{c^2\epsilon_0} \tag{1.48}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad \text{ローレンツゲージ}$$

（1.47）と（1.48）から $\mathbf{A}$ と ϕ が求まる（境界条件が必要）。$\mathbf{A}$ と ϕ から（1.42）と（1.43）を使って $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ が求まる。

1.5 真空中の Maxwell 方程式のポテンシャルを用いた解 — グリーン関数を使おう —

ここから (1.47) と（1.48）を解いて ϕ と $\mathbf{A}$ を求める。
一般的に、

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -4\pi f(x,t) \tag{1.49}$$

の形の式は下記をみたす Green 関数を用いて解く事が出来る。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^{(\pm)}(x,t;x',t') = -4\pi\delta(x-x')\delta(t-t') \tag{1.50}$$

右辺はデルタ関数であるから、(x',t') の場所にある局所源が (x,t) にいかなるポテンシャルを作るかを記述する。この時（1.49）の特解は

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \int G^{(\pm)}(x,t;x',t')f(x',t')d^3x'dt$$

となる。

例.　　　境界が無い自由空間の場合
Green 関数は相対時間 $\tau = t - t'$、相対距離 $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ だけの関数 $G(\mathbf{R},\tau)$ である。また、等方的なので球対称、すなわち $|\mathbf{R}|$ のみの関数と成るべき。ラプラス演算子の同径方向成分が $\nabla_R^2 = \frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}R$ と成る事を用いると、Green 関数の満たすべき式は

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(R,\omega) = -4\pi\delta(R)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG(R,\omega)) + k^2G(R,\omega) = -4\pi\delta(R) \qquad (k := \omega/c)$$

$$R \neq 0 \text{ で} \quad \frac{d^2}{dR^2}(RG(R,\omega)) + k^2RG(R,\omega) = 0$$

これより Green 関数は

$$\boxed{G(R,\omega) = \frac{e^{\pm ikR}}{R} := G_k^{(\pm)}(R)} \tag{1.51}$$

となる。

一般解はこれらの和として

$$G(R,\omega) = AG_k^{(+)}(R) + BG_k^{(-)}(R) \qquad \underline{A+B=1}$$

とあらわされる。ここで、$G_k^{(+)}(R)$ は原点から外に広がる球面波、$G_k^{(-)}(R)$ は原点方向に収束する球面波である。
デルタ関数の積分表示

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega, \qquad \delta(-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega$$
$$\omega' = -\omega, \qquad d\omega' = -d\omega$$
$$\delta(-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega'\tau}(-d\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega'\tau} d\omega' = \delta(\tau)$$

を用いて $G_k^{(\pm)}(R)$ を時間領域に戻すことを考える。(1.50) を ω に関してフーリエ逆変換すると、

$$\begin{aligned} G^{(\pm)}(R,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int G_k^{(\pm)}(R) e^{-i\omega\tau} d\omega \qquad (k=\omega/c \text{ に注意}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{R} e^{-i\omega(\tau\mp R/c)} d\omega \\ &= \frac{1}{R}\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) \end{aligned} \tag{1.52}$$

最後の等号ではデルタ関数の積分表示を用いた。上式より $G^{(\pm)}(R,\tau)$ は

$$\begin{aligned} G^{(\pm)}(R,\tau) &= \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|x-x'|}{c}\right)}{|x-x'|} = \frac{\delta\left(-t' + \left[t \mp \frac{|x-x'|}{c}\right]\right)}{|x-x'|} \\ &= \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{|x-x'|}{c}\right]\right)}{|x-x'|} \end{aligned} \tag{1.53}$$

(1.53) は $t' = t \mp \frac{|x-x'|}{c}$ でのみ値を持ち、t は現在時刻なので $G^{(+)}$ は現在より前の時間の、$G^{(-)}$ は現在より後の時間の源による解である事が解る。

因果律の話— 前者を遅延グリーン関数（Retarded Green fn.）
後者を先進グリーン関数（Advanced Green fn.） — と呼ぶ。

このグリーン関数を用いると、非同次ヘルムホルツ方程式 (1.49) の特解は

$$\varphi(x,t) = \int\int G^{(\pm)}(x,t;x',t') f(x',t') d^3x dt \tag{1.54}$$

となる。$f(x',t')$ は $t' = 0$ の近傍でのみ値を持つとすると、$t \to -\infty$ では (1.49) の右辺 $= 0$ の同次方程式の解となる。この、源が無い場合の解を $\varphi_{in}(x,t)$ としよう。この場合、時間がたって源が work し出すと源から波が生成される。この時、因果律を考慮すると、遅延グリーン関数を用いた

$$\varphi(x,t) = \varphi_{in}(x,t) + \int\int G^{(+)}(x,t;x',t') f(x',t') d^3x' dt' \tag{1.55}$$

が解となる。$t \to -\infty$ で $\varphi_{in}(x,t)=0$ という最も簡単な場合には、解は t' に関する積分を実行してしまうと下記のようになる。

$$\varphi(x,t)=\int \frac{f(x',t_{\rm ret})}{|x-x'|}d^3x' \tag{1.56}$$

ただし、$t_{\rm ret}$ は $t_{\rm ret}=t-|x-x'|/c$ で定義された遅延時間である。以上より、ポテンシャル $\mathbf{A}$、ϕ は

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(x',t_{\rm ret})}{|x-x'|}d^3x' \tag{1.57}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\mathbf{j}(x',t_{\rm ret})}{|x-x'|}d^3x' \tag{1.58}$$

となる。

1.6 電磁場におけるエネルギー密度とエネルギー流 —1884 年における Poynting による議論を参考に—

相対論においては”全世界的”な保存則は成立しない。局所的な保存則のみ意味がある。
例. $\nabla\cdot\mathbf{j}=-\partial\rho/\partial t$ （電荷保存則）電荷の消失は電流の外部への流れを意味する。
電磁場のエネルギー保存を定量的に書き表したい。すなわち、

$$\nabla\cdot\mathbf{S}+\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{1.59}$$

の様な式を見つけたい。ここで、u は電磁場のエネルギー密度、$\mathbf{S}$ は電磁場のエネルギー流（単位時間に単位面積当たりを通過するエネルギー量）であり、以降の議論により定義されるものである。

ところで、(1.59) の様な電磁場の保存則は一般に成立し得るだろうか？。それが不可能であることは以下の様な例を考えると理解できる。

- 暗い部屋でスイッチを入れたらライトが付く。
  (フィラメント $\to$ 黒体輻射 $\to$ 光)
- 荷電粒子の電磁場による加速。

上の例より解る様にエネルギー保存を考えるときには電磁場のエネルギー以外に荷電粒子に対する仕事も考慮しなければならない。このため、以下では先ず荷電粒子に対する仕事を考える。
電荷 q の粒子のうけるローレンツ力は

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

なので、単位体積中に N 個の粒子が存在するとすると、粒子の受ける仕事率は

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = Nq\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \tag{1.60}$$

これより、(1.59) 式は荷電粒子の対する仕事まで考慮すると

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} &= -\nabla\cdot\mathbf{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.61}$$

と成るべきである事が解る。

次に、$\mathbf{S}$ と u の表式を (1.61) 式左辺から推察する。

Maxwell 方程式 (1.4) と $\mathbf{E}$ の内積をとり整理すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} &= \epsilon_0 c^2\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) - \epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\epsilon_0 c^2\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \epsilon_0 c^2\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\epsilon_0 c^2\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \epsilon_0 c^2\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\epsilon_0 c^2\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right\} \end{aligned} \tag{1.62}$$

ただし、2 行目から 3 行目への式変形には (1.2) を、また、1 行目から 2 行目への変形では以下のベクトル解析の公式を用いている。

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

(1.62) 式と (1.61) 式を比較すると

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \tag{1.63}$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + c^2\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) \tag{1.64}$$

と対応させれば (1.62) 式は保存則の式 (1.61) の形に成る事が解る。この対応関係から (1.64) は電磁場のエネルギーと解釈できる事が解る。また、(1.63) より $\mathbf{S}$(ポインティングベクトル) は単位時間に単位面積を通過する電磁場のエネルギー流を表すと解釈できる。

* (1.62) 式より解る様に u は時間に依存しない電磁場による不定性をもつ。

1.7 エネルギー流の例

例.1 電磁波

$\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$ なので $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ 。よって、$|\mathbf{S}| = \epsilon_0 c^2|\mathbf{E}||\mathbf{B}| = \epsilon_0 c^2|\mathbf{E}|^2$ 。

一方、

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + c^2\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) = \frac{\epsilon_0}{2}(|\mathbf{E}||\mathbf{E}| + c^2\frac{|\mathbf{E}||\mathbf{E}|}{c^2}) = \epsilon_0|\mathbf{E}|^2$$

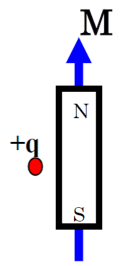
単位時間に単位面積を通過するエネルギーは上式に光速 c をかければよいので、$uc = \epsilon_0 c|\mathbf{E}|^2$。これは上記の $|\mathbf{S}|$ と等しい。
例.2　　充電しつつあるキャパシタ
円盤状のキャパシタ（半径を a とする）$\rightarrow$ 円周状に磁場が存在
ちょうど外周上での磁場の大きさは $c^2\nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E}/\partial t$ より、

$$2\pi a c^2|\mathbf{B}| = \pi a^2|\dot{\mathbf{E}}|$$
$$B = \frac{a}{2c^2}\dot{E}, \qquad (B := |\mathbf{B}|,\ E := |\mathbf{E}|)$$

ただし、充電速度が非常に遅い極限を考え、電荷分布は円盤状で一様であるとしている。上式より、ポインティングベクトルは極板間に外から内向きに大きさ $|\mathbf{S}| = \epsilon_0 c^2|\mathbf{E}||\mathbf{B}| = a\epsilon_0 E\dot{E}/2$ である事が解るが、キャパシタの側面積は $2\pi a h$ であるから、全注入量は $\pi a^2 \epsilon_0 h E\dot{E}$ となる。
一方、極板間の電場 $\mathbf{E}$ は一定とみなせるから、全エネルギーは $U = \pi a^2 h \times (\epsilon_0 E^2/2)$ であり、極板間のエネルギー変化量は $du/dt = \pi a^2 h \epsilon_0 E\dot{E}$ となり、やはり上記と一致する。
♣ 電磁場のエネルギーは極板間から流入する点が面白い。

<u>以下の２つは授業を良く思い出して下さい。</u>

例.3　　導体電線中を電流が流れているときの $\mathbf{S}$ と u
$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ オームの法則
発熱してくるエネルギーはどこから流入してくるか論ぜよ。



例.4　　図のように棒磁石の隣に電荷 q をそっと置いた時の $\mathbf{S}$ を図示せよ。この磁石の磁化を一瞬にして消失させると何が起きるか？。また、その現象は何を意味するか？。

1.8　電磁場の運動量

電磁場にエネルギー流が存在するとき、物体に運動量を与えることが出来る。例えば、電磁波の一種である光を鏡に全反射させると鏡は光の進行方向の向きに運動量を受けとる。

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \epsilon_0\mu_0(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{D}\times\mathbf{B} \tag{1.65}$$

を電磁場の運動量とよぶ。
（問）　自由空間を伝わる電磁波の場合の運動量について考察せよ。

（章末問題）　小テスト
ある地点 $\mathbf{r}$ にある微小区間 $\Delta\mathbf{l}$ を流れる電流密度 $\mathbf{j}_0$ が作る磁場分布を以下の手順で求めよ。但し、場は定常的であり時間変化する項は無いものとする。

Basic

(1) 場が定常である時の真空中の Maxwell 方程式をかけ。

(2) 定常状態のときにはベクトルポテンシャル（1.42）をクーロンゲージの条件を満たすようにとると式を簡単にすることが出来る。ポテンシャル ϕ、$\mathbf{A}$ についての微分方程式を導き、ϕ、$\mathbf{A}$ について解け（難しい場合はヒントを参照のこと）。

(3) 前問の $\mathbf{A}$ を用いて、ある地点 $\mathbf{r}$ にある微小区間 $\Delta\mathbf{l}$ を流れる電流密度 $\mathbf{j}_0$ が作る磁場 $\mathbf{B}$ を求めよ（この電流から生じる磁場を計算する式を Biot-Savart の法則と呼ぶ）。

(4) 前問の式を用いて、無限に広い電線を流れる直線電流が作る磁場分布を求めよ。得られた結果が（1.7）と同じである事を確かめよ。

Basic の（2）が解けない場合のヒント

(1) $\nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$ を ∇ を用いて展開せよ。但し、$\mathbf{v}$ は任意のベクトルである。∇ は Einstein の縮約を用いて以下の様に書き表すことが出来る。

$$(\nabla\varphi)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi,\ \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_i}v_i,\ (\nabla \times \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}v_k$$

ここで ϵ_{ijk} は Eddington のイプシロンであり、Kronecker のデルタとの間に以下の関係式が成り立つ。

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{il},\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

また、ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルであり添え字の奇置換に対して符号が反転する。

(2) 右辺が δ 関数である Poisson 方程式 $\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r})$ を $G(\mathbf{r})$ について解け。
Laplace 演算子を処理するためには、フーリエ変換 $G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int d\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}G(\mathbf{r})$、$\delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int d\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ を用いて波数空間で計算したのち、フーリエ変換をすればよい。

Advanced

(1) 電流から磁場を求めるには、今回行ったようにベクトルポテンシャルを用いる方法と例.3 で行ったように Ampere の法則と磁場の対称性を用いる方法がある。この 2 つの方法の共通点と相違点を考察せよ。