

## 2 物質中の Maxwell 方程式

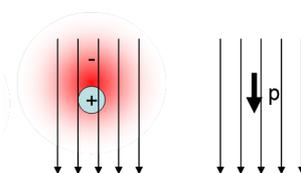
ここでは、前節で述べた真空中の Maxwell 方程式から物質中の Maxwell 方程式を如何に構成するかを述べる。そのために、新たな電流として分極電流と磁化電流を導入するとともに、微視的な描像で書かれていた Maxwell 方程式を粗視化して巨視的な Maxwell 方程式を得る。

### 2.1 分極と磁化

#### ○ 分極

誘電体の分極  $\mathbf{P}$

電場  $\mathbf{E}$  のもとに直流電流の流れない物質をおくとうなるか？



原子を考える。

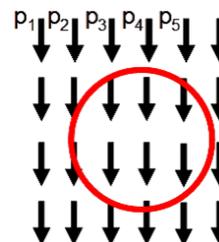
本当は量子力学が必要 → 今は定性的に議論する。

$\mathbf{E}$  によって電荷のずれが生じ「分極」が出来る。

「物質」はこの様な原子の集合体。

マクロには単位体積当たりの平均で記述する。例えば

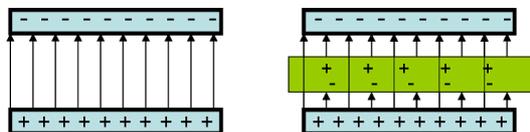
$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i$$



である。まず、以下では原子が密に存在するとして連続量  $\mathbf{P}$  を定義できたとして話を進める。

○ この様な「物質」を電荷  $Q$  で充電したコンデンサーに入れてみよう。

$$Q = CV, \quad E = \frac{Q}{Cd}$$



「物質」が存在すると内部では電場が減少する

誘電体の表面で Gauss の定理を使うと面電荷密度が求まる。

$$\sigma_{\text{分極}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

$E = Q/Cd$  を考えると、内部では一見  $\mathbf{E}$  が減少した事に相当。

$$\rho_{\text{分極}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

◎ この修正をガウスの法則に加える → 電荷を 2 種類に分ける。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{自由}} + \rho_{\text{分極}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{自由}} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

(2.1) より、ガウスの法則は新しい場  $\mathbf{D}$  を導入して以下の様書き換えることが出来る。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) &= \rho_{\text{自由}} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{自由}}, \quad (\mathbf{D} := \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

◎ また、アンペールの法則は

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}_{\text{自由}} + \mathbf{i}_{\text{分極}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

とかける。先程の分極電荷の式より、

$$\frac{\partial \rho_{\text{分極}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (2.4)$$

一方の連続の式は

$$-\nabla \cdot \mathbf{i}_{\text{分極}} = \frac{\partial \rho_{\text{分極}}}{\partial t} \quad (2.5)$$

(2.4)、(2.5) より、

$$\mathbf{i}_{\text{分極}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (2.6)$$

(2.3)、(2.6) より、

$$\begin{aligned} c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{i}_{\text{自由}}}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{i}_{\text{自由}}}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

以上をまとめると

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.10)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}_{\text{自由}}}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D} := \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.12)$$

○ 良くある表記法

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (2.13)$$

$$\epsilon = (1 + \chi) \epsilon_0, \quad (1 + \chi \equiv \epsilon_r : \text{比誘電率}) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.15)$$

$$= \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (\leftarrow \text{線形を仮定}) \quad (2.16)$$

実際には (2.16) の様な線形近似 ( $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ ) は比較的狭い範囲でしか成り立たず、

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots) \quad (2.17)$$

と非線形分極  $\chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$  が存在する。

#### ○ 磁化 M

磁石はどう扱う?

磁石は外部の磁場に平行にそろい内部の磁場を強くする → コイルの鉄心  
量子力学的効果!!

磁化 M の存在は環状電流の存在を意味している。磁化が存在するときは必ず環状電流が有ると考える (詳しくは、Feynman IV p-232 を参照)。この電流を磁化を生み出す電流として

$$\mathbf{i}_{\text{磁化}} = \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.18)$$

と書く。この時、アンペールの法則は再修正されて

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}_{\text{自由}}}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{M} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.19)$$

$$c^2 \nabla \times \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = \frac{\mathbf{i}_{\text{自由}}}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.20)$$

ここで、

$$\mathbf{H} := \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (2.21)$$

と H を定義すると、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_{\text{自由}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.22)$$

ここで、(2.12)、(2.21) により新しく導入された場 D、H の中の P と M の符号に注意。

「分極により電場は減少するが、磁化により磁場は増加する！」

以上をまとめると、よく知られた物質中の Maxwell 方程式のセットが得られる。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}} \quad (2.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_{\text{自由}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.26)$$

物質方程式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{H} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (2.28)$$

## 2.2 巨視的 Maxwell 方程式と物質の応答

### 2.2.1 点分布と連続分布

まずは、電荷源や電流源などの微視的な物理量を連続的に分布した物理量に如何に変換するか、その処方について考える。

#### 物理量の粗視化

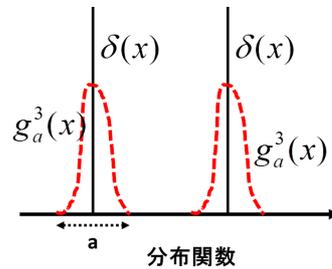
$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \quad (2.29)$$

$$i(x) = \sum_j i_j \delta(x - x_j) \quad (2.30)$$

以下では (2.29)、(2.30) の様に  $\delta$  関数の和で定義された局所的な分極や電流から連続分布の分布関数を定義する事を考える。限られた "点" でのみ値を持つ関数 (2.29)、(2.30) から空間的に連続な関数を作るためには有る領域の物理量を平均化する必要があるが、そのために、以下の条件を満たす連続な "粗視化関数"  $g_a^3(x)$  を導入する。

$$\text{supp } g_a^3(x) \subset \{x; |x| < a\}, \quad \int g_a^3(x) d^3x = 1 \quad (2.31)$$

ここで、1つ目の条件は  $g_a^3(x)$  が半径  $a$  の球の内部でのみ値を持つ、という事をあらわす。この粗視化関数  $g_a^3(x)$  を用いて局所的な分布関数を畳み込み積分することにより ((2.29) (2.30) のデルタ関数を  $g_a^3(x)$  に置き換えることにより) (2.29)、(2.30) をピンボケさせて連続な物理量を定義する。



$$P(x) := \langle p \rangle = \int p(x') g_a^3(x - x') dx'^3 = \sum_i p_i g_a^3(x - x_i) \quad (2.32)$$

$$I(x) := \langle i \rangle = \int i(x') g_a^3(x - x') dx'^3 = \sum_j i_j g_a^3(x - x_j) \quad (2.33)$$

$g_a^3(x)$  の台 (半径  $a$  の球) を十分大きくとり、半径  $a$  の球内に非常に多くの  $x_i, x_j$  が含まれる様にして (2.32)、(2.33) の様な "ピンボケ" 操作を行うことを粗視化とよび、えられる物理量を巨視的な物理量と言う。

## 2.2.2 微視的 Maxwell 方程式から巨視的 Maxwell 方程式へ

空間に多数の荷電粒子が存在し、それらが電荷や電流を担っている場合を考える。粒子間は真空であるので電場  $\mathbf{e}$ 、磁場  $\mathbf{b}$  と電束密度  $\mathbf{d}$ 、磁場の強さ  $\mathbf{h}$  の間に

$$\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h} \quad (2.35)$$

の関係が成立する。また、電荷分布が  $\gamma(t)$ 、電流密度が  $\mathbf{j}(t)$  で与えられたとすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \gamma \quad (2.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (2.38)$$

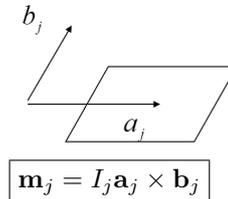
$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \quad (2.39)$$

で与えられる。このように、個々の電荷や電流を担うものを正確に扱う電磁場の方程式を微視的 Maxwell 方程式と呼ぶ。これから、方程式を粗視化して巨視的な場で記述された Maxwell 方程式を導こう。ここで、電荷や電流の分布がどのように与えられるかを考える。自由な電荷や電流ばかりでなく、分極や分極電流、微小環状電流も電荷分布や電流分布にきいてくる。

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_{\text{free}} + \gamma_{\text{dipole}} \\ &= \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) - \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_{\text{free}} + \mathbf{j}_{\text{dipole}} + \mathbf{j}_{\text{loop}} \\ &= \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) - \sum_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}_i \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \sum_j (\mathbf{m}_j \times) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここで、(2.40) 式の右辺第 2 項は分極電荷  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$  による寄与である。また、(2.41) 式右辺第 2 項は  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  であり、世の中に分極電荷及び分極電流のみしか存在しない場合に成り立つべき保存則  $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{dipole}} + \partial \rho_{\text{dipole}} / \partial t = 0$  を考えると理解できる。(2.41) 式右辺第 3 項は微小環状電流による効果をあらわす項である。



### A. 電磁場の粗視化

原子や粒子の半径  $a_B$  に比べると大きい範囲  $a$  での粗視化を考える。すなわ

ち、 $a$  を  $a \gg a_B$  とする。粗視化が簡単にできる Maxwell 方程式は以下の 2 つである。

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (2.42)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (2.43)$$

この 2 つの式はソース  $\gamma$ 、 $\mathbf{j}$  が入っていないので常に成立する。巨視的な場の量を  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle$ 、 $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$  とすると、上の 2 式は

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.44)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.45)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle \mathbf{e} \rangle = \int g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{e}(\mathbf{x}') d^3 x' \\ \mathbf{B} &= \langle \mathbf{b} \rangle = \int g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{b}(\mathbf{x}') d^3 x' \end{aligned} \quad (2.46)$$

である。一般に  $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{H}$  は電荷分布や電流分布で変化するような物理量であるが、真空中の場合は以下のように与えられるので、これをベースに考えていく。

$$\mathbf{D}_0 = \langle \mathbf{d} \rangle = \epsilon_0 \langle \mathbf{e} \rangle = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{H}_0 = \langle \mathbf{h} \rangle = \frac{1}{\mu} \langle \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (2.48)$$

## B. 電荷分布の粗視化

### ガウスの法則の粗視化

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{d} \rangle &= \langle \gamma_{\text{free}} \rangle + \langle \gamma_{\text{dipole}} \rangle \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{d} \rangle &= \nabla \cdot \mathbf{D}_0 = \langle \gamma_{\text{free}} \rangle + \langle \gamma_{\text{dipole}} \rangle \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{free}}(x) &= \langle \gamma_{\text{free}} \rangle \\ &= \int g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) d^3 x' \\ &= \sum_i g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) q_i \end{aligned} \quad (2.50)$$

同様に

$$\rho_{\text{dipole}}(\mathbf{x}) = - \sum_j (\mathbf{p}_j \cdot \nabla) g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (2.51)$$

一方、双極子分布も粗視化すると、

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{p} \rangle = \sum_j \mathbf{p}_j g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (2.52)$$

$\rho_{\text{dipole}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  より

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}_0 &= \rho_{\text{free}} + \rho_{\text{dipole}} \\ &= \rho_{\text{free}} - \nabla \cdot \mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.53)$$

これより、 $\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  とおくと、巨視的なガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}} \quad (2.54)$$

が得られる。

### C. 電流分布の粗視化

$$\nabla \times \mathbf{h} - \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (2.55)$$

を粗視化する。左辺は、

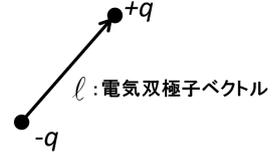
$$\nabla \times \langle \mathbf{h} \rangle - \frac{\partial \langle \mathbf{d} \rangle}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}_0 - \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t} \quad (2.56)$$

右辺は

$$\langle \mathbf{j}_{\text{free}} \rangle = \sum_i q_i \mathbf{v}_i g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}_{\text{loop}} \rangle &= - \sum_i (\mathbf{m}_i \times \nabla) g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\ &= \sum_i \nabla \times \mathbf{m}_i g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\ &= \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{M} := \sum_i \mathbf{m}_i g_a^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\langle \mathbf{j}_{\text{dipole}} \rangle = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (2.59)$$



$j$  番目の双極子  
 $\mathbf{P}_j = q_j \mathbf{l}_j$  の位置  
を  $x_j$  とした。

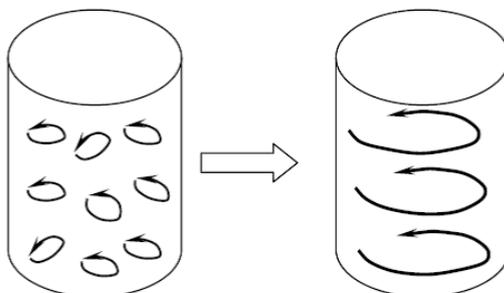
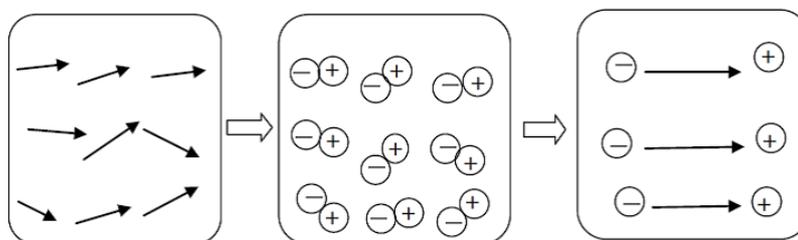
となる。以上をまとめると (2.55) 式を粗視化したものは、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_0 - \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t} &= \mathbf{j}_{\text{free}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \\ \nabla \times (\mathbf{H}_0 - \mathbf{M}) &= \mathbf{J}_{\text{free}} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}_0 + \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{free}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\mathbf{H} := \mathbf{H}_0 - \mathbf{M}, \mathbf{D} := \mathbf{D}_0 + \mathbf{P}) \quad (2.61)$$

### 2.2.3 電気双極子や微小環状電流の粗視化の意味

粗視化すると微小な分極や環状電流は平均的な値を持つ一つの分極や環状電流に置き換えることができる。



## 2.3 絶縁体中での電磁波

真空中の電磁波については 1.2 節で述べた。ここでは、巨視的な Maxwell 方程式を使って連続的に分布した物質中の電磁波の伝搬について考える。

### 2.3.1 分極を考慮した場合の波動方程式

まずは、自由な電荷や電流が無い物質 – 誘電体 – を考えよう。すなわち、 $\rho = 0$ 、 $\mathbf{i} = 0$  であり、誘電体の中では  $\mathbf{P}$  があらわに現れる。ただし、磁性は無いものとする ( $\mathbf{M} = 0$ )。このとき、物質中の Maxwell 方程式は、

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0 \quad (2.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.64)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \quad (2.65)$$

ファラデーの法則 (2.63) に左から  $\nabla \times$  すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \\ -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (2.66)$$

ここで、2行目から3行目への変形には (2.62) を用いている。今、 $\mathbf{P}$  は  $\mathbf{E}$  に対して線型に応答し、その応答は空間的に変化しないとすると (空間的に一様な応答であるとする)、 $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (2.67)$$

とあらわされ、 $\chi$  は空間座標に依存しない。この場合、(2.66) 式に (2.67) 式を代入すると、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_0 \chi \mathbf{E}) - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\epsilon_0 \nabla \cdot \chi \mathbf{E}) \quad (2.68)$$

と成るが、ガウスの法則 (2.62) は応答  $\chi$  が空間的に一様な場合

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E}) &= 0 \\ \epsilon_0 \nabla \cdot (1 + \chi) \mathbf{E} &= 0 \\ \epsilon_0 (1 + \chi) \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \therefore \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

と成るため (2.68) 式は結局、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon_r \mathbf{E} = 0, \quad (\epsilon_r := 1 + \chi, \text{ 比誘電率}) \quad (2.70)$$

となる。(2.70) 式は  $\chi$  ( $\epsilon_r$ ) に時間依存性があるため、 $(\nabla^2 - \partial^2/\partial t^2)\psi = 0$  の波動方程式の形はしていない。次節以降で、この  $\chi$  の性質及び (2.70) 式の取り扱い方をみていく。

### 2.3.2 応答関数による分極の記述 — 線型応答 —

分極  $\mathbf{P}(t)$  は外場によって生じた応答である。本来なら、これは量子力学を用いて具体的な物質について解かれるべきものであるが、ここでは線型応答の範囲内で現象論的に考える。

本来、分極  $\mathbf{P}(t)$  は電場がかかった瞬間に即時応答的に生成されるものではなく電場がかかってから時間をかけて "ジワジワ" 生成されてくるものである (ダイポールはすぐには動けない)。このため、**分極  $\mathbf{P}(t)$  は時刻  $t$  以前の電場に対する応答 (応答関数を  $\chi(t)$  とする) の畳み込み積分で表されるべきであり、**

$$\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \quad (2.71)$$

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \chi(t), & t \geq 0 \end{cases}, \quad \text{因果律} \quad (2.72)$$

と書かれるべきである。ここで、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{E}$  は物理量 (実関数) なので  $\chi(t)$  は実関数である。

#### フーリエ成分で表現

(2.71) 式を周波数領域で表現する事を考えると、

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.73)$$

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{P}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.74)$$

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.75)$$

であり、

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \quad (2.76)$$

なので、(2.71) 両辺に  $e^{i\omega t}$  をかけて  $t$  で積分すると、

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{P}}(\omega) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') \mathbf{E}(t') e^{i\omega t} dt' dt \\
 &= \frac{\epsilon_0}{(2\pi)^2} \iiint \tilde{\chi}(\omega') e^{-i\omega'(t-t')} \tilde{\mathbf{E}}(\omega'') e^{-i\omega'' t} e^{i\omega t} dt dt' d\omega' d\omega'' \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2\pi} \iiint \tilde{\chi}(\omega') e^{i\omega' t'} \tilde{\mathbf{E}}(\omega'') e^{-i\omega'' t'} \delta(\omega - \omega') dt' d\omega' d\omega'' \\
 &= \epsilon_0 \iint \tilde{\chi}(\omega') \tilde{\mathbf{E}}(\omega'') \delta(\omega - \omega') \delta(\omega' - \omega'') d\omega' d\omega'' \\
 &= \epsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)
 \end{aligned}$$

と成る（2行目から3行目、3行目から4行目で(2.75)をもちいている）。  
上式より解る様に、時間領域での畳み込みは周波数領域では積と成る。

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \quad (2.77)$$

### 2.3.3 絶縁体の中での波動方程式

この節では、前節での考察を用いて2.3.1節で求めた分極を考慮した場合の波動方程式(2.70)を考察する。

(2.70) 式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1 + \chi) \mathbf{E} = 0$$

の  $\chi \mathbf{E}$  の項、すなわち分極  $\mathbf{P}$  に起因する項は、前節でみたように分極が即時応答しない場合 ( $\chi(t)$  が時間に関するデルタ関数でない場合) には

$$\chi \mathbf{E} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \quad (2.78)$$

と表現されるべきものであった。このことをきちんと考慮すると(2.70)式は本来、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \mathbf{E} + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right) = 0 \quad (2.79)$$

と書かれるべきものである。これをフーリエ変換し周波数領域で書くと、

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\omega) - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \left( \tilde{\mathbf{E}}(\omega) + \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \right) &= 0 \\
 \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \tilde{\chi}(\omega)) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) &= 0
 \end{aligned} \quad (2.80)$$

応答関数  $\chi(t)$  の逆フーリエ変換  $\tilde{\chi}(\omega)$  を **複素感受率** とよぶ。一般に  $\tilde{\mathbf{P}}(\omega)$ 、 $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  は複素関数なので **複素感受率  $\tilde{\chi}(\omega)$  も一般に複素関数** となる ( $\chi(t)$  は実関数である事に注意)。

因果律及び複素関数の性質から  $\tilde{\chi}(\omega)$  が満たすべき種々の性質が導かれるが、これについてはのちの章及び問題で述べる。

○ 複素感受率を用いて複素比誘電率及び複素誘電関数 (複素誘電率) が以下の様に定義される。

$$\text{複素比誘電率} \quad \epsilon_r(\omega) := 1 + \tilde{\chi}(\omega) \quad (2.81)$$

$$\text{複素誘電関数} \quad \epsilon(\omega) := \epsilon_0(1 + \tilde{\chi}(\omega)) \quad (2.82)$$

電場のフーリエ成分はこの複素誘電関数を用いて

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega) = \epsilon(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\omega) \quad (2.83)$$

となる。また、複素屈折率の 2 乗を

$$\tilde{n}^2(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega) \quad (2.84)$$

と定義すると、(2.80) 式は

ヘルムホルツの波動方程式

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\omega) + \frac{\omega^2 \tilde{n}^2(\omega)}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) = 0 \quad (2.85)$$

と成る。 $\tilde{n}$  が実数の場合、 $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  として  $x$  方向に進行する平面波  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$  を考えると、

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 = \frac{\omega^2 \tilde{n}^2}{c^2} \quad (2.86)$$

という分散関係が得られ、物質中の位相速度は  $\nu_p = \omega/|\mathbf{k}| = c/\tilde{n}$  であたえられる。

## 2.4 巨視的 Maxwell 方程式における物質場

### 2.4.1 複素感受率と複素誘電率

分極  $\mathbf{P}$  を線型応答の範囲で考えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \\ \tilde{\mathbf{P}}(\omega) &= \epsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \end{aligned}$$

であった。また、複素誘電関数 (2.82) は (2.72) 式の  $\chi$  の定義を思い出すと (i.e. 因果律を考慮すると)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \tilde{\chi}(\omega)) = \epsilon_0 \left( 1 + \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right) \quad (2.87)$$

とあらわされる (ただし、 $\chi$  は実関数)。

やってみよう!

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \quad (2.88)$$

とおくと、

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega), \quad \epsilon'(-\omega) = \epsilon'(\omega), \quad \epsilon''(-\omega) = -\epsilon''(\omega) \quad (2.89)$$

と成ること確認せよ。

⊙ 複素誘電関数  $\epsilon(\omega)$  の実部と虚部の関係

$\epsilon(\omega)$  を  $\omega = \omega' + i\omega''$  の複素平面上の関数に解析接続することを考える。

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right) \quad (2.90)$$

は  $\chi(\tau)$  が  $\tau > 0$  でのみ値を持ち、応答関数の性質から  $\chi(\tau) \rightarrow 0$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ) なので、 $\epsilon(\omega)$  は上半面のいたるところで解析的である。したがって実軸上で得られた関係式 (2.89) は複素平面上の上半面へ以下のように自然に拡張される

$$\epsilon(-\omega^*) = \epsilon^*(\omega). \quad (2.91)$$

注意

$\epsilon(\omega)$  は上半面でのみ解析的であるため (2.89) の自然な拡張は  $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$  ではない。

♣ 特に  $\omega$  が純虚数のとき

$$\epsilon(i\omega'') = \epsilon^*(i\omega'') \quad (2.92)$$

つまり虚軸上で関数  $\epsilon(\omega)$  は実数である ( $\omega = i\omega''$  のとき  $\text{Im}\epsilon = 0$ )。

♣ 実軸上は原点を除いて特異点なし (後にある様に、金属の  $\epsilon$  は原点に極を

持つ)。

(2.91) の性質は、 $D = \epsilon E$  のとき  $D$  が実数である事を保証している。

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^*e^{i\omega^*t} \quad (2.93)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon(\omega)\tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t} + \epsilon(-\omega^*)\tilde{\mathbf{E}}^*e^{i\omega^*t} \quad (2.94)$$

右辺第 2 項目は、(2.91) より  $\epsilon^*(\omega)\tilde{\mathbf{E}}^*e^{i\omega^*t}$  となるので第 1 項の複素共役となる。すなわち、 $D$  も実関数。

考えてみよう!

今回の因果律に関する考察からは  $D$  の実関数性 (2.94) は  $\omega$  が複素平面上の上半面の時、すなわち  $E$  が時間に関して指数関数的に「増加」するときのみに導かれた ((2.93) で上半面の  $\omega$  を考えよ)。この理由を考察せよ。

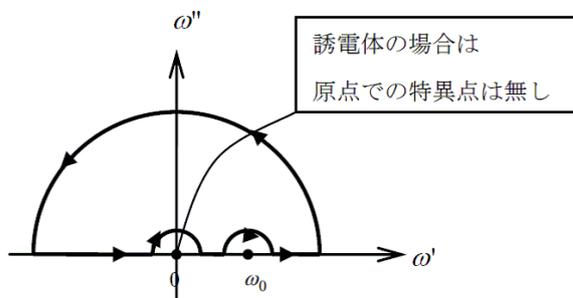
Hint!

- 今回の結果は「因果律」から導かれた。
- 指数関数的に減少する電場は  $t \rightarrow -\infty$  でどうなるか?
- 昔々のそのまた昔 ( $t \rightarrow -\infty$ ) 無限に大きな電場があった場合には、たとえ  $\chi(\tau) \rightarrow 0, (\tau \rightarrow \infty)$  であっても今の状況を扱うのは難しい...

#### 2.4.2 クラマース・クローニツヒの関係式

右図の様な経路に沿った以下の様な積分を考えると、

$$\oint_c \frac{\epsilon(\omega) - \epsilon_0}{\omega - \omega_0} = 0. \quad (2.95)$$



$\epsilon(\omega)$  は上半面で解析的かつ無限大に発散する事がないので周回積分 ((2.95) 右辺) はゼロに成る (コーシーの積分定理)。

いま、応答関数の性質上  $\chi(\omega)$  は有界  $|\chi| < \infty$  なので (2.90) より無限半円の積分はゼロと成る事が解る ( $\omega = R(\cos \theta + i \sin \theta)$  として  $|\int f(z)dz| < \int |f(z)|dz$  を用いて考えよ)。このため、(2.95) 式は

$$p \int_{\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega) - \epsilon_0}{\omega - \omega_0} - i\pi(\epsilon(\omega_0) - \epsilon_0) = 0 \quad (2.96)$$

となる。ここで、第 1 項は実軸上の主値積分をあらわし、第 2 項は  $\omega_0$  周りの周回による項である。 $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$  として (2.96) 式を実部と虚部

に分けて書くと、

クラマース・クロニツヒの関係式

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi} p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx, \quad (2.97)$$

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(x) - \epsilon_0}{x - \omega} dx, \quad (2.98)$$

となる。ただし、金属の場合は  $\omega = 0$  に特異点があり、

$$\epsilon_{AC} = i \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.99)$$

の項が存在するので、

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(x) - \epsilon_0}{x - \omega} dx + \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.100)$$

となる。

### 2.4.3 金属の場合

(2.26) 式をオームの法則  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  が成立する場合に書き直すと、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.101)$$

となる。

#### 注意

後述するように、オームの法則  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  は  $1/\omega$  が電子の平均自由時間 ( mean free time ) より十分長い場合に成立する。

(2.101) 式のカレントに関する項  $\sigma \mathbf{E}$  は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\omega) &= (\sigma - i\omega\epsilon(\omega)) \mathbf{E}(\omega) \\ &= -i\omega(\epsilon(\omega) + i \frac{\sigma}{\omega}) \mathbf{E} \\ &= -i\omega \tilde{\epsilon}(\omega) \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\tilde{\epsilon}(\omega) := \epsilon(\omega) + i \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.103)$$

と、誘電率の虚部として扱うことが出来る。

♣ 十分低周波では (2.103) 式で第2項の効果がメインと成り

$$\tilde{\epsilon}(\omega) \sim i \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.104)$$

となる。このため、 $\tilde{\epsilon}(\omega)$  は虚部のみとなり、原点が特異点となる。

♣  $\tilde{\epsilon}(\omega) = i\frac{\sigma}{\omega}$  と書くことに意味はあるのか??。

下記の周波数を下限としてそれ以上の周波数では破綻する。

$$|\sigma| = |\omega\epsilon|, \quad \omega : \text{通常の金属の場合 THz}$$

THz 以上の周波数領域では、単純なオームの法則は適用出来ない。

### 注意

たいていの場合、金属における電磁場は、金属物体が空間的に不均一なことで決定されている。そのような場合には、時間変化に着目した上のような展開は、そもそも意味がない。巨視的な の概念は使えなくなる。

### ◎ 振動数が大きな場合

$\omega \rightarrow \infty$  では  $\mathbf{P}$  は  $\mathbf{E}$  においつかない。高周波の極限では自由な電子の運動は、

$$m\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \therefore \mathbf{v} = \frac{ie\mathbf{E}}{m\omega} \quad (2.105)$$

$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  より、

$$\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2}, \quad \therefore \mathbf{P} = \sum e\mathbf{r} = -\frac{e^2}{m\omega^2} N\mathbf{E} \quad (2.106)$$

したがって、

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}\right) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \quad (\omega_p : \text{プラズマ振動数}) \quad (2.107)$$

一般には、ダンピングを考えて、以下のドルーデの分散式が得られる。

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}\right) \quad (2.108)$$

(2.108) 式は、

$$\omega \gg \gamma \rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad (2.109)$$

$$\omega \ll \gamma \rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + i\frac{\omega_p^2}{\omega\gamma}\right) \quad (2.110)$$

となり、 $\omega \ll \gamma$  のときは  $\omega_p^2/\gamma = \sigma$  とおくとオームの法則に従う金属の式となる事がわかる。

- (2.110) 式の意味をもう少し考える  
(2.105) 式には、電子が他の電子や格子と衝突する場合、抵抗の項  $\gamma v$  が以下の様に入ってくる

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \gamma \mathbf{v} = e \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.111)$$

やってみよう！

- (2.111) から分極  $\mathbf{P}$  を求めると、確かに (2.108) が出てくることを確認せよ。

♣ (2.110) 式の条件は (2.111) 式をみると "電子の散乱が激しく、(2.111) 式の左辺第 1 項が第 2 項に対して無視できる" ということであるが、この条件は  $\mathbf{v} \propto \mathbf{E}$  を意味し、オームの法則そのもの ( $\mathbf{j} = eN\mathbf{v}$  である事を思い出そう) である。これが、(2.101) 式以降で述べたオームの法則が適応可能なための条件の意味である。

## 2.5 金属の表面インピーダンス

$\omega$  がそれほど大きくない場合  $|\epsilon_r| \gg 1$

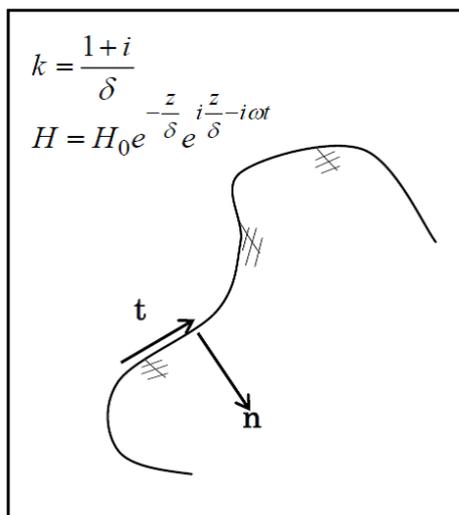
この条件のもとでは、金属中の波長

$$|\delta| \sim \frac{c}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_0\omega\sigma}} \quad (2.112)$$

は真空中の波長と比べてずっと短い。空間の不均一性の問題も、 $\delta$  が金属の曲率半径に比べて短ければ任意の電磁場に対する平面波の問題として扱える。

$\delta$  が小さい

→ 電磁場の法線方向の導関数が接線方向の導関数より大。



つまり、金属内部で表面近傍では平面波として扱える。

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_t \times \nu = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \mathbf{H}_t \times \mathbf{n} \quad (2.113)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \equiv \xi : \text{表面インピーダンス}, \quad Z_0 : \text{真空のインピーダンス}$$

○ THz 以下（低周波）では

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = i\frac{\sigma}{\omega}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1-i) = \xi' + i\xi'' \quad (2.114)$$

表面を通過するエネルギーの時間平均は

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2}\xi'|\mathbf{H}_t|^2\mathbf{n} \quad (2.115)$$

これは金属の中で散逸してしまうエネルギーであるため、

$$\xi' > 0 \quad (2.116)$$

であるべきである。これにより、表面インピーダンスを求める際に、 $\xi^2 = \mu/\epsilon$  の平方根をとるときの符号の決定法として、「 $\xi$  の実部が正に成るように符号を決める」方法が得られる。

○ 振動数が大きい場合の問題点

進入長  $\delta$  は自由電子の自由行程  $l$  と同程度になる。このような場合は電場の時間的不均一性のために、 $\epsilon$  を使った電場の巨視的な Maxwell 方程式による記述が不可能となる。この場合でも  $\nu/l \gg \omega$  より、 $\sigma$  は一定と考えてよい。（Landau 電磁気学より）

しかし、

$$E_t = \xi[H_t, n] \quad (2.117)$$

の形の境界条件があることは重要（ $\delta$  が小さいときは常に平面波という近似は OK である）。

ただし、 $\xi$  はもはや  $\epsilon$  と結びつけることは出来ない。

○ さらに  $\omega$  が大きくなるとどうなるか？

再び赤外域で電磁波の巨視的な記述が可能になる。これは、伝導電子による光吸収（ドルーデ）が起こるため、一般にこのような励起は非常に短い寿命（100fs 以下）となり、結果的に  $l$  が  $\delta$  より小さくなるから。

(章末問題) 小テスト

電磁波の波束の伝搬速度は群速度  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  により与えられる。

波束は時間的・空間的に局在した波であり、様々な周波数成分を持つため一般に位相速度とは異なる伝搬速度を持つ。

1. 真空中を伝わる電磁波の位相速度 (2.3.3 節) と群速度を求めよ。
2. 物質中を伝わる電磁波について、屈折率  $n$  が周波数に依存せず一定である場合の位相速度と群速度を求めよ。
3. 屈折率が周波数に依存する場合を考える。屈折率が実数であるとする  
と分散関係 (2.86) は  $k = \frac{n(\omega)\omega}{c}$  となる。  
群速度  $\frac{\partial \omega}{\partial k}$  を  $\omega$  と  $n(\omega)$  を用いて表せ。
4. 金属中を伝わる電磁波を考える。2.4 章のように金属の誘電率はドルーデの分散式で与えられるものとする。
  - (a) 複素屈折率  $n(\omega)$  を求めよ (2.3.3 節)。
  - (b) 電磁波の振動数がプラズマ振動より充分大きい場合を考える ( $\omega \gg \omega_p$ )。またダンピングが充分小さく無視できるとする。電磁波の位相速度と群速度を求め、振動数の関数として図示せよ。