Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

７．物質中の電磁波 II

7.4.　エネルギー流の連続性

ポインティングベクトル　$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\varepsilon_0 c^2(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$　は単位時間に単位面積を通って流れる電磁場のエネルギー流束をあらわす。

$\mathbf{E},\mathbf{H}$ を複素数として扱う場合は、複素ポインティングベクトル $\mathbf{S}=\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*$ の実部がエネルギー流束の時間平均をあたえる。したがって、$\mathbf{S}$ の向きを単位ベクトル $\boldsymbol{l}$ であらわすと、エネルギー流束は、

$$\overline{\mathbf{S}}=\mathrm{Re}(\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\mathbf{E}^0\right|^2 \boldsymbol{l}=\frac{1}{2}n\frac{1}{Z_0}\left|\mathbf{E}^0\right|^2 \boldsymbol{l}$$

であたえられる。ここに $n=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ は屈折率（非磁性体を考え、$\mu=\mu_0$ とする。）、Z_0 は真空中のインピーダンス $Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=376.7\Omega$ である。

ちなみに、エネルギー密度の時間平均は

$u=\frac{1}{4}\left[\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*+\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right]=\frac{1}{2}\varepsilon\left|\mathbf{E}^0\right|^2$　　とあたえられ、$\left|\overline{\mathbf{S}}\right|=\frac{c}{n}u$ と言う関係式が導かれる。

これはエネルギーの流れの速さが、平面波の場合は $\frac{c}{n}$ であることを示している。

角度 θ で面に入射している場合は、面を通過するエネルギー流束は面ベクトルへの射影であたえられる。したがって、単位時間当たり単位面積あたりに面を通過するエネルギー流束の時間平均は、

$$I=\frac{1}{2}\frac{n}{Z_0}\left|\mathbf{E}^0\right|^2\cos\theta$$

とあたえられる。　　　（注）電力の式　$P=IV=\frac{V^2}{R}$　とのアナロジー。R と Z の関係

入射光、反射光、透過光の単位時間当たり単位面積あたりに面を通過するエネルギー流束の時間平均は、

入射光強度　　$I_\mathrm{i}=\frac{\mathbf{n}_1}{Z_0}\left|\mathbf{E}_\mathrm{i}{}^0\right|^2\cos\theta_\mathrm{i}$

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

反射光強度　$I_r = \dfrac{\mathbf{n}_1}{Z_0}\left|\mathbf{E}_r{}^0\right|^2 \cos\theta_\mathbf{i}$

透追光強度　$I_t = \dfrac{\mathbf{n}_2}{Z_0}\left|\mathbf{E}_t{}^0\right|^2 \cos\theta_r$

であたえられるので、p 偏光の場合以下のように計算される。

$$I_r + I_t = \left\{\frac{\mathbf{n}_1}{Z_0}\left|r_{12}\right|^2 \cos\theta_i + \frac{\mathbf{n}_2}{Z_0}\left|t_{12}\right|^2 \cos\theta_r\right\}\left|\mathbf{E}_\mathbf{i}{}^0\right|^2$$

$$= \left\{\frac{\mathbf{n}_1}{Z_0}\left(\frac{\mathbf{n}_2\cos\theta_1 - \mathbf{n}_1\cos\theta_r}{\mathbf{n}_2\cos\theta_\mathbf{i} + \mathbf{n}_1\cos\theta_r}\right)^2 \cos\theta_\mathbf{i} + \frac{\mathbf{n}_2}{Z_0}\left(\frac{2\mathbf{n}_1\cos\theta_\mathbf{i}}{\mathbf{n}_2\cos\theta_\mathbf{i} + \mathbf{n}_1\cos\theta_r}\right)^2 \cos\theta_r\right\}\left|\mathbf{E}_\mathbf{i}{}^0\right|^2$$

$$= \frac{\mathbf{n}_1}{Z_0}\cos\theta_1\left|\mathbf{E}_\mathbf{i}{}^0\right|^2 = I_\mathbf{i}$$

したがって、エネルギー反射率として　→　$T + R = 1$

ただし、エネルギー透過率 T、反射率 R は下記のように定義される量である。

$$T = \frac{I_t}{I_\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1}t^2\frac{\cos\theta_r}{\cos\theta_\mathbf{i}} = \frac{4\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\cos\theta_1\cos\theta_r}{\left(\mathbf{n}_2\cos\theta_\mathbf{i} + \mathbf{n}_1\cos\theta_r\right)^2}$$

$$R = \frac{I_r}{I_\mathbf{i}} = r^2 = \left(\frac{\mathbf{n}_2\cos\theta_\mathbf{i} - \mathbf{n}_1\cos\theta_r}{\mathbf{n}_2\cos\theta_\mathbf{i} + \mathbf{n}_1\cos\theta_r}\right)^2$$

８．物質中の電磁波 III

（a）全反射

スネルの法則

$$\sin\theta_2 = \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2}\sin\theta_1$$

光学的に厚いもの（$\mathbf{n}$ 大）から薄いもの（$\mathbf{n}$ 小）に入射する場合を考える。

すなわち、$\mathbf{n}_1 > \mathbf{n}_2$ とすると、$\theta_2 > \theta_1$ である。

$\dfrac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2}\sin\theta_1 \geq 1$ となる θ_1 が存在する。この場合はどうなるか？

ここで、$\dfrac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2}\sin\theta_1 = 1$ をみたす θ_1 を臨界角 θ_c と呼ぶ。

例（臨界角）　ガラス $\mathbf{n}_1 = 1.5$　空気 $\mathbf{n}_2 = 1$ の場合　$\theta_c = 41.8^0$

◎ $\theta_\mathbf{i}$ か θ_c より大のとき、θ_r は実数でなくなる。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

$$\sin\theta_2 = \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2}\sin\theta_1 \geq 1$$

$$\therefore \cos^2\theta_2 = 1 - \sin^2\theta_2 < 0$$

$\cos\theta_2$は純虚数になる。$\cos\theta_2 = \pm\mathbf{i}\sqrt{\left(\frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 - 1}$

反射係数は複素数になる。　それぞれの振幅は、

$$\left|r_{12}{}^{S}\right| = \left|\frac{\mathbf{n}_1\cos\theta_1 - \mathbf{n}_2\cos\theta_2}{\mathbf{n}_1\cos\theta_1 + \mathbf{n}_2\cos\theta_2}\right| = 1、\quad \left|r_{12}{}^{p}\right| = \left|\frac{\mathbf{n}_2\cos\theta_1 - \mathbf{n}_1\cos\theta_2}{\mathbf{n}_2\cos\theta_1 + \mathbf{n}_1\cos\theta_2}\right| = 1$$

１である。これは全反射を意味する。反射係数の位相を$r^S = e^{i\theta_S}$、$r^{\mathbf{p}} = e^{i\theta_{\mathbf{p}}}$　とおくと、ｓ、ｐ偏光での反射光の位相差$\theta = \theta_{\mathbf{p}} - \theta_S$は、下記のように計算される。

$$\begin{cases} \tan\dfrac{\theta_S}{2} = \dfrac{-\sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\dfrac{\mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1}\right)^2}}{\cos\theta_1} \\ \tan\dfrac{\theta_{\mathbf{p}}}{2} = \dfrac{-\sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\dfrac{\mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1}\right)^2}}{\left(\dfrac{\mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1}\right)^2\cos\theta_1} \end{cases}$$

したがって、

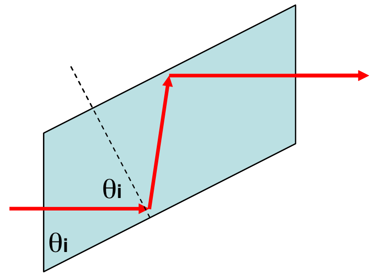
$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\dfrac{\mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1}\right)^2}}{\sin^2\theta_1}$$

この左辺は$\theta_1 = \pi/2,\ \theta_c$のとき 0 になる。

極大値は$\dfrac{d\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)}{d\theta_{\mathbf{i}}} = 0$より　$\sin^2\theta_1 = \dfrac{2\mathbf{n}_2{}^2}{\mathbf{n}_1{}^2 + \mathbf{n}_2{}^2}$の場合であり、そのときの位相差の最大値は$\tan\dfrac{\theta_m}{2} = \dfrac{\mathbf{n}_1{}^2 - \mathbf{n}_2{}^2}{2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}$であたえられる。

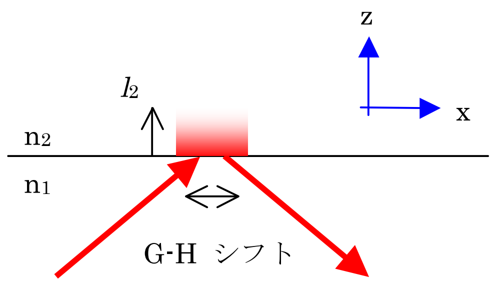
例　フレネルロム　（計算を確かめよ）

θ_1の角をもつ菱面体（ロム）をつかって、側面から４５度偏光の光を垂直入射し、内部全反射を２回使って遅相子がつくれる。例えば、λ／４波長板（直線偏光→円偏光）の場合、全体の位相差が$\theta_m = \dfrac{\pi}{2}$、すなわち、$\theta_m = \dfrac{\pi}{4}$とすればよい。この場合、$\mathbf{n}_1 = 1.5$　の材料を、$\theta_1 = 51.8^\circ$　でつかえばよい。



（ｂ）全反射におけるエハネッセント波

$\theta_1 \gg \theta_c$の場合



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t e^{i(k_2 \sin\theta_r x + k_2 \cos\theta_r z) - \mathbf{i}\omega t}$$

$$= \mathbf{E}_t e^{i\left(k_2 x \frac{\mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_2} \sin\theta_\mathrm{i} \pm k_2 z i \sqrt{\left(\frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2}\right)^2 \sin^2\theta_\mathrm{i} - 1}\right) - i\omega t}$$

$$= \mathbf{E}_t e^{\mathbf{i}\left(k_2 x \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2} \sin\theta_\mathrm{i}\right) - i\omega t} e^{\mp k_2 z \sqrt{\left(\frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2}\right)^2 \sin^2\theta_\mathrm{i} - 1}}$$

+符号はｚ方向に増加するのでおかしい。したがって、－符号のみをとる。

これはｚ方向に指数関数的に減衰する波を表している。(エバネセント波)

しみ出し長　$l_2 = k_2^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 - 1}\right)^{-1} \approx \lambda_2$　は光の波長程度である。

X 方向には波数　$\dfrac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2} k_2 \sin\theta_1$　で伝播する波である。この波数の大きさを考える。

$\mathbf{n}_1 = 1.5$　$\mathbf{n}_2 = 1$（空気）　$\theta_1 = 51.8^\circ$で

$$\frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2} k_2 \sin\theta_\mathrm{i} = \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_2} \mathbf{n}_2 \frac{\omega}{c} \sin\theta_1 = 1.18 \frac{\omega}{c}$$

エバネッセント波は空気中を伝播するにもかかわらず空気中の波数より大きい波数をもつ。

◎グースヘンシェンシフト

全反射$\theta_1 \gg \theta_c$においては、Phase shift がある。→光束も横方向にシフト

これをグースヘンシェン（G-H）シフトとよぶ。

（ｃ）光のトンネル効果

以下、TM 波のみ考える。(**p** 偏光）下記のような２境界の透過、反射の問題を考える。

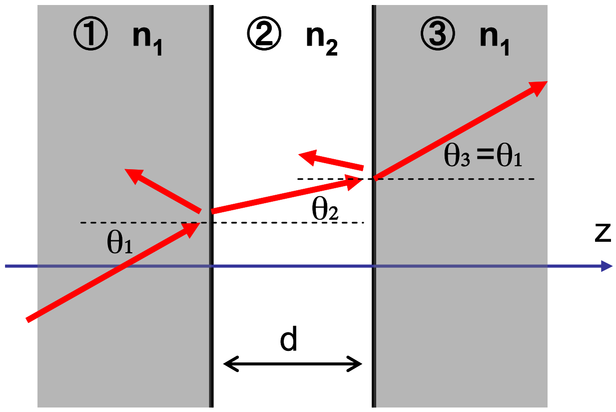
とりあえず、全反射を考えない。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

最終的には入射角を臨界角以上にする。

領域①→②

$$\begin{cases} t_{12} = \dfrac{2\mathbf{n}_1\cos\theta_1}{\mathbf{n}_2\cos\theta_1 + \mathbf{n}_1\cos\theta_2} \\[2ex] r_{12} = \dfrac{\mathbf{n}_2\cos\theta_1 - \mathbf{n}_1\cos\theta_2}{\mathbf{n}_2\cos\theta_1 + \mathbf{n}_1\cos\theta_2} \end{cases}$$



領域②→③

$\mathbf{n}_1 \to \mathbf{n}_2 \quad \theta_1 \to \theta_2$

$\mathbf{n}_2 \to \mathbf{n}_1 \quad \theta_2 \to \theta_1$

とすればよい。

$$\begin{cases} t_{23} = \dfrac{2\mathbf{n}_2\cos\theta_2}{\mathbf{n}_1\cos\theta_2 + \mathbf{n}_2\cos\theta_1} \\[2ex] r_{23} = \dfrac{\mathbf{n}_1\cos\theta_2 - \mathbf{n}_2\cos\theta_1}{\mathbf{n}_1\cos\theta_2 + \mathbf{n}_2\cos\theta_1} \end{cases}$$

実は①→②、②→③は逆過程なので、 $t_{23} = t'_{12}$ $\quad r_{23} = r_{12}{}'$ である。

確認すると（Stokes の定理）

明らかに $r_{23} = -r_{12}$

$$t_{12}t_{23} = \frac{4\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{(\mathbf{n}_2\cos\theta_1 + \mathbf{n}_1\cos\theta_2)} = 1 - r_{23}{}^2$$

この問題は、以前やった多重反射の問題と取り扱いはまったく同じ。

故に、透過光は下記のようになる。

$$\mathbf{E}_t = \frac{1-r^2}{1-r^2e^{i\phi}}e^{i\frac{\xi}{2}}\mathbf{E}_0 \qquad \phi = 2d\frac{\mathbf{n}_2\omega}{c}\cos\theta_2$$

したがって、透過率は以下のようにかける。

$$T = \left|\frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_0}\right|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{1-2r^2\cos\phi + r^4} \qquad \cos\phi = 1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}$$

$$= \frac{(1-r^2)^2}{1+r^4-2r^2+4r^2\sin^2\dfrac{\phi}{2}} = \frac{1}{1+\dfrac{4r^2}{(1-r^2)^2}\sin^2\dfrac{\phi}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+\left\{\dfrac{\mathbf{n}_2{}^2\cos^2\theta_1 - \mathbf{n}_1{}^2\cos^2\theta_2}{2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\cos\theta_1\cos\theta_2}\sin\dfrac{\phi}{2}\right\}^2} = \frac{1}{1+\left\{\dfrac{k_1{}^2-k_2{}^2}{2k_1k_2}\sin\dfrac{\phi}{2}\right\}^2}$$

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

ただし、$k_1=\dfrac{\omega}{c}n_2\cos\theta_1$, $k_2=\dfrac{\omega}{c}n_1\cos\theta_2$, $\phi=\dfrac{2d\omega}{c}n_2\cos\theta_2=2\dfrac{n_2}{n_1}k_2d$.

ここから入射角が臨界角以上になった場合を考える。

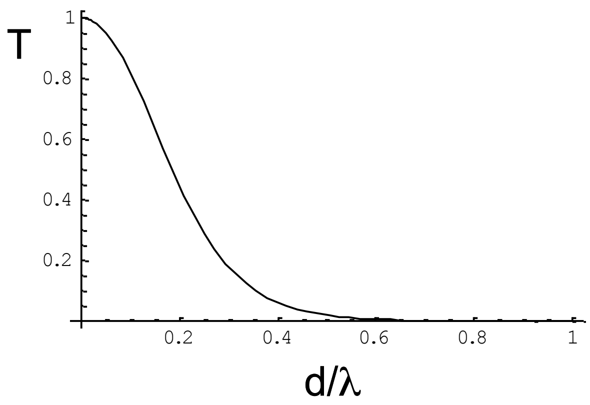
この場合、②の領域はエバネッセント波だけが存在する。前項と異なるのは、＋ｚ、－ｚの両方向のエバネッセント波が存在することである。この場合、$\cos\theta_2$は純虚数となるので、

k_2も純虚数となる。$\dfrac{n_2}{n_1}k_2=i\eta$、$Q=\dfrac{k_1^{\ 2}+\eta^2}{2k_1\eta}$（$\eta$、Ｑは共に実数）とおくと、

透過率の式は下記のようになる。この中にはもはや、虚数は含まれていない。

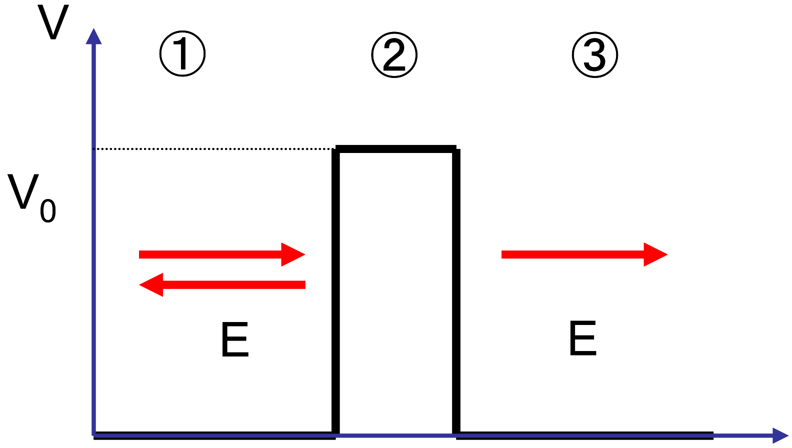
$$T=\frac{1}{1+\{Q\sinh(\eta d)\}^2}$$

η、Ｑ は入射角や媒質の屈折率で決まる量である。距離ｄを変えたときにとうなるか
考えてみる。
右図は、$\mathbf{n}_1=1.5$　$\theta_1=51.8^\circ$の場合の計算結果である。
横軸は波長を単位にした距離。波長の半分ぐらいの距離まで物体を離すと透過しなくなることがわかる。



（発展問題）

量子力学のトンネル問題との対応



Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

この、光のトンネル現象は、ポテンシャル V_0 に運動エネルギーE の粒子があたり、トンネル透過する量子力学の問題と等価である。

②の領域で波数が虚数になってしまう点は下記の対応になっている。古典的には
全反射するエネルギー領域での透過問題！

$$k_2{}^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_1 \cos\theta_2\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$$

前頁で求めた透過率の表式において下記の入れ替えをおこなうと
まったく同じ答えとなることを確認せよ！！

$$\eta = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$Q = \frac{k_1^2 + \eta^2}{2k_1\eta}$$

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

9．幾何光学

幾何光学はε が波長に比べてゆっくりと空間的に変化する場合に適用可能である。この時、光のエネルギーの伝播は「光線（ray)」として記述される。

9．1　アイコナール方程式

この節では、一様な媒質ではなく、誘電関数（誘電率）ε が空間依存性を持つ場合を考える。すなわち、$\varepsilon(\omega,\mathbf{r})=\varepsilon(\mathbf{r})$。この時、屈折率 n、位相速度 c も以下のように空間依存性を持つ。μ の空間依存性は考えず、真空中の値と同じにしておく。すなわち $\mu=\mu_0$

$$\varepsilon(\mathbf{r})=\varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{r}) \\ n(\mathbf{r})=\sqrt{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \\ c(\mathbf{r})=\frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \qquad (9-1)$$

（９－１）を Maxwell 方程式に代入する。いま、波長λ、角振動数ωの光を考える。$\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{r})$の変化が電場の空間変化（波長$\lambda=2\pi/|\mathbf{k}|$）よりゆっくりとしている場合、すなわち

$$\lambda\frac{|\nabla\varepsilon|}{\varepsilon}<<1 \qquad (9-2)$$

の場合、波動方程式

$$(\nabla^2-\frac{1}{c(\mathbf{r})^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0 \qquad (9-3)$$

が得られる。以後、簡単のため、スカラー場$\Psi(\mathbf{r},t)$を考える。

$$(\nabla^2-\frac{1}{c(\mathbf{r})^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\Psi(\mathbf{r},t)=0 \qquad (9-4)$$

単色光（角振動数ω）を扱っているので、以下の形の解を考える。

$$\Psi(\mathbf{r},t)=a(\mathbf{r})e^{i\{\phi(\mathbf{r})-\omega t\}} \qquad (9-5)$$

ここで$a(\mathbf{r})$を電場振幅、$\phi(\mathbf{r})$を<u>アイコナール</u>[1]と呼ぶ。共に実関数であるとする。

（９－５）を（９－４）に代入すると、

$$(\nabla^2 a(\mathbf{r})-a(\mathbf{r})(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2+\frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2}a(\mathbf{r}))+i(2\nabla a(\mathbf{r})\cdot\nabla\phi(\mathbf{r})+a(\mathbf{r})\nabla^2\phi(\mathbf{r}))=0 \qquad (9-6)$$

が得られる。$a(\mathbf{r})$、$\phi(\mathbf{r})$は実関数であるから、実部、虚部はそれぞれ０である。

---

[1] ギリシャ語のアイコン（$\varepsilon\iota\kappa\tilde{\omega}\nu$）＝像に由来。最近のコンピューター（Mac を代表とするウィンドウシステム）にもたくさん入っているアイコンと語源は同じ。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

故に、

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 a(\mathbf{r}) - a(\mathbf{r})\left|\nabla\phi(\mathbf{r})\right|^2 + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2}a(\mathbf{r}) = 0 \\
&2\nabla a(\mathbf{r})\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r})\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0
\end{aligned} \qquad （９－７）$$

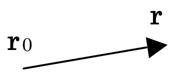
が得られる。ここまでは（９－２）の近似の元で厳密である。次に、媒質（$\varepsilon(\mathbf{r})$）の変化が電場の空間変化よりゆっくりとしている場合を考えていることから、$a(\mathbf{r})$、$\phi(\mathbf{r})$に対して以下の近似をする。

<u>幾何光学近似</u>

電場振幅$a(\mathbf{r})$,アイコナール$\phi(\mathbf{r})$も電磁波の空間変化に比べてゆっくりと変化する。

この場合、$\mathbf{r}_0$の近傍で$\phi(\mathbf{r})$をテーラー展開すると、

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + \nabla\phi(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \ldots\ldots \qquad （９－８）$$



第２項は$\mathbf{k} = \nabla\phi(\mathbf{r}_0)$とおくと、波数としての意味があることがわかる（(９－８）をもとの式に代入してみよ)。

この類推から電磁波の波長λは、

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} = \frac{2\pi}{|\nabla\phi(\mathbf{r})|} \qquad （９－９）$$

で定義される。幾何光学近似は、

$$\lambda^2\frac{\nabla^2 a(\mathbf{r})}{a(\mathbf{r})} << 1 \qquad （９－１０）$$

として（９－７）式の第一式の第一項を無視する近似である。

<u>アイコナール方程式（eikonal equation）</u>

幾何光学近似のもとで、（９－７）の第一式は、

$$\left|\nabla\phi(\mathbf{r})\right|^2 = \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} = k_0^{\ 2}n(\mathbf{r})^2 \qquad （９－１１）$$

と変形される。これをアイコナール方程式と呼ぶ。

アイコナール方程式が解け、$\phi(\mathbf{r})$がわかると、（９－７）式の第二式

$$2\nabla a(\mathbf{r})\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r})\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0 \qquad （９－１２）$$

から、電場振幅$a(\mathbf{r})$を得ることができる。

以上から、誘電率が空間的に変化している場合でも、波長に比べてゆっくりと変化している場合には、問題が解けることがわかる。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

「幾何光学」では、アイコナール方程式の解$\phi(\mathbf{r})$から作られるベクトル

$$\mathbf{k} = \nabla\phi(\mathbf{r}) \qquad （９－１３）$$

の積分曲線が「光線」と一致する。

波面は$\phi(\mathbf{r}) - \omega t = const.$により決定される。波面にとった任意の変位$\delta\mathbf{r}$に対して、

$$\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{r} = \nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{r} = \delta\phi = 0$$

故に、$\mathbf{k} = \nabla\phi(\mathbf{r})$は波面に垂直。

光線の経路長をlとすると、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \mathbf{e}$$

は「光線」の接線ベクトルである。（９－１１）、（９－１３）より、

$$\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c(\mathbf{r})}\mathbf{e} = k_0 n(\mathbf{r})\mathbf{e} \qquad （９－１４）$$

故に、

$$\frac{d\phi(\mathbf{r})}{dl} = \nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} \qquad （９－１５）$$

この式からアイコナール$\phi(\mathbf{r})$は光線に沿った積分

$$\int_{\mathbf{r_0}}^{\mathbf{r}} \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} dl = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r_0}) \qquad （９－１６）$$

によりあたえられる。

○　ハミルトンの特性関数

$$\phi_H(\mathbf{r},\mathbf{r_0}) = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r_0}) \qquad （９－１７）$$

これを用いるとアイコナール方程式は、

$$(\nabla\phi_H)^2 = (\frac{\omega}{c(\mathbf{r})})^2, \quad (\nabla_0\phi_H)^2 = (\frac{\omega}{c(\mathbf{r}_0)})^2$$

とかける。力学における Hamilton-Jacobi 方程式はこのアナロジーから導かれた。[2]

---

[2] **Hamilton-Jacobi（HJ）方程式**のひとつの表現は以下のように与えられる。

ハミルトンの主関数$S(q,p,t) = \phi_H(q,p) - Et$から、導かれるハミルトンの特性関数$\phi_H(q,p)$をもちいると、運動方程式は

$$(\nabla\phi_H)^2 = 2m(E-V) = p^2$$

となる。

歴史的には、ドブロイ波（$\lambda = h/p$）の長波長近似（幾何光学近似）として HJ 方程式を考え、近似の前の波動方程式として、Schrodinger 方程式が導かれた。(波動力学)

このように、「幾何光学」の思考：Maxwell 方程式→アイコナール方程式（「光線」の方程式）の逆をたどって、HJ 方程式（質点の力学）→Schrodinger 方程式（波動方程式）が導かれたのは大変興味深い。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

９．２　フェルマーの原理とホイヘンスの原理

アイコナール方程式から「フェルマーの原理」を導出する。
アイコナール方程式（９－１１）

$$(\nabla\phi)^2 = k_0{}^2 (n(\mathbf{r}))^2 \qquad （９－１８）$$

において空間の尺度を、

$$(d\xi, d\eta, d\varsigma) = k_0 n(\mathbf{r})(dx, dy, dz) \qquad （９－１９）$$

と変更する。この時、空間の計量は、

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\varsigma^2 = k_0{}^2 n(\mathbf{r})^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

となる。この空間でアイコナール方程式は、

$$(\frac{\partial\phi}{\partial\xi})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial\eta})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial\varsigma})^2 = 1 \qquad （９－２０）$$

と書き直すことができる。この方程式のひとつの解

$$\phi = a\xi + b\eta + c\varsigma \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1) \qquad （９－２１）$$

を考える。この空間では、$\phi = const.$ の面は平行平面なので、それと直交する曲線は直線となる。したがって、この解に対応する「光線」は直線となる。それ故、２点 P，Q を通る光線は積分

$$\int_P^Q d\sigma = k_0 \int_P^Q n(r) dl = \omega \int_P^Q \frac{dl}{c(\mathbf{r})} \qquad （９－２２）$$

が極値をとるという条件になる。ここに dl はカーテシアン座標系での線要素である。

（４－２２）式の $\int_P^Q \frac{dl}{c(\mathbf{r})}$ は PQ 間を光が進む時間に相当する。したがって、（９－２２）式が極値をとるという条件は、以下のように記述可能である。

フェルマーの原理

「２点間を通る光は所要時間が最短（または、最長）となる経路を通る。」

○　フェルマーの原理の応用例

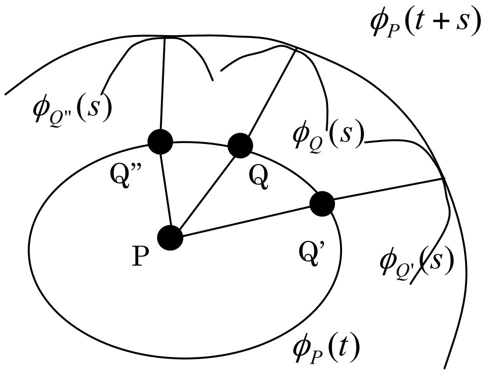
反射の法則
スネルの法則
逃げ水

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

以下、フェルマーの原理からホイヘンスの原理を導出する。

○ <u>ホイヘンスの原理</u>

「波源 P からでた波の時間 t 後の波面を $\phi_P(t)$、またこの波面の任意の点 Q からでた波の時間 s 後の波面をとすると、波源 P からの波の時間 t+s 後の波面 $\phi_P(t+s)$ はすべての $\{\phi_Q(s) | \ Q \in \phi_P(t)\}$ の包絡線である。」



ホイヘンスの原理

＜導出＞

授業でやります。

＜ヒント＞

$\phi_Q(s)$ は波面 $\phi_P(t+s)$ と接していることを示せばよい。もし交わっていた場合、どんな矛盾が存在するか？

<u>９．３　レンズ系</u>

カメラやメガネなど身近なものの中で活躍しているレンズを幾何光学の枠組みで記述する。また、レンズの公式やレンズを組み合わせていったとき、どこに像が生じるかを議論する。応用上も球面が作りやすいので、この節の議論は球面に限る。

(a) <u>近軸近似</u>

図９－１の様に、屈折率 n_1 の物質と屈折率 n_2 の物質が半径 r の球面で接している場合を考える。球の中心 O をとおる直線を光軸と呼ぶ。球面左の光軸上の一点 P から、球面右の光軸上の１点 Q に光線が到達する場合を考える。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

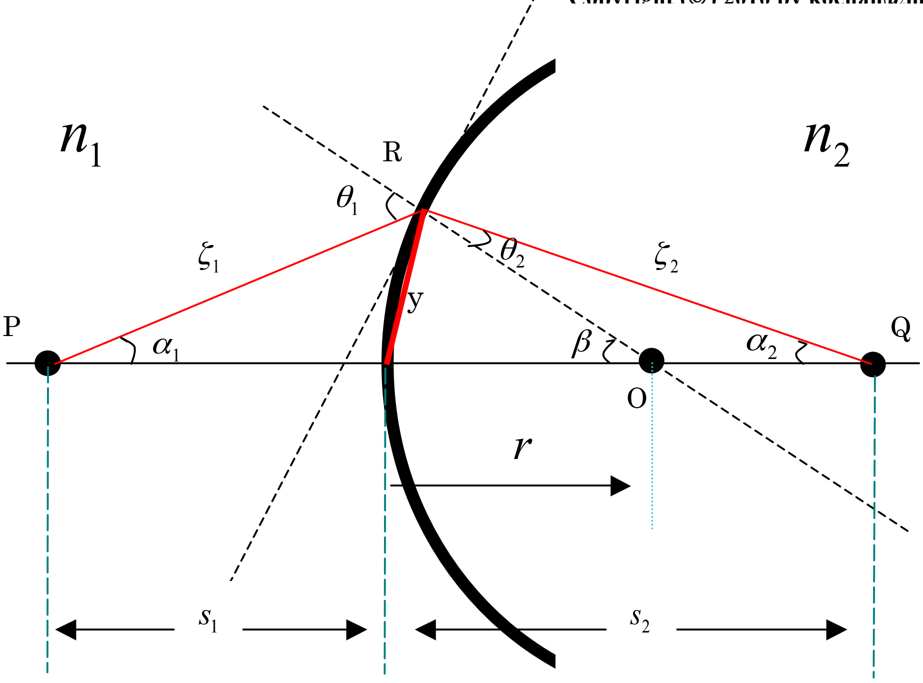


図４－１　近軸近似

屈折率は$n_2 > n_1$を満たしているとする。また、$s_1, s_2, r > 0$とする。
この時、サイン定理から

$$\frac{s_1 + r}{\sin(\pi - \theta_1)} = \frac{\zeta_1}{\sin\beta}$$
$$\frac{s_2 - r}{\sin\theta_2} = \frac{\zeta_2}{\sin(\pi - \beta)} \qquad （９－２３）$$

スネルの法則

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad （９－２４）$$

より、

$$\frac{s_1 + r}{\zeta_1} = \frac{n_2}{n_1}\frac{s_2 - r}{\zeta_2} \qquad （９－２５）$$

が得られる。ここで光線が光軸からあまり離れないという近似（近軸近似）を

すると、$s_1 \cong \zeta_{1,}\ s_2 \cong \zeta_2$となるから、（９－４７）式は

$$1 + \frac{r}{s_1} = \frac{n_1}{n_2}(1 - \frac{r}{s_2}) \qquad （９－２６）$$

変形して、

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{r} \qquad （９－２７）$$

が得られる。この式はもはや、α_1やα_2に依存していないことから、１点Ｐから発した近軸な光線はすべてＱを通ることがわかる。Ｐの像がＱにできることがわかる。
ここでいくつか例題を解こう。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

例１． $n_1 = 1, \quad n_2 = 1.5, \quad s_1 = 4, \quad r = 1$の場合

この屈折率の組み合わせは、空気中のガラスの場合に相当している。（９－２７）を計算すると、$s_2 = 6$が得られる。Q に実像ができる。

例２． $n_1 = 1, \quad n_2 = 1.5, \quad s_1 = 0.5 \quad r = 1$の場合

例１とは異なり、$s_2 = -1$となってしまう。これは球面境界の右側に像ができずに、発散光となることを意味している。この場合、境界の左側の Q に虚像ができ、そこから、あたかも境界がないかのごとく光が伝わるという記述が可能である。（詳しくは授業で）

例２のような場合も系統的に扱うために、以降は、図４－２のように座標系を定めて記述する。ここでは、P の x 座標が負になっていることに注意。

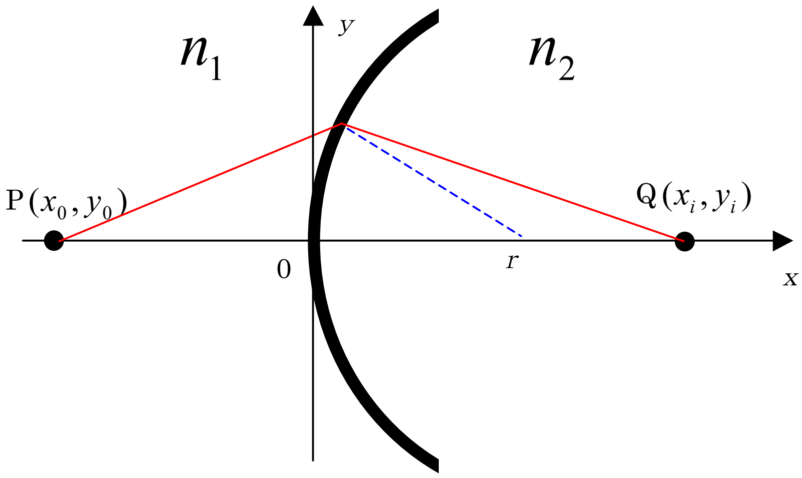


図９－２　レンズ系を扱うための座標系

この座標系では、

$$-\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \qquad (９－２８)$$

この表記では、r が負の場合も扱うことが可能である。これは、図４－２において、n_1の側に球面がある場合に相当する（球の中心が負の側にある）。

例３． $n_1 = 1, \quad n_2 = 1.5, \quad x_1 = -2, \quad r = -1$の場合

$x_i = -1.5$となる。したがって、虚像となり発散光として振舞うことがわかる。

例４． 平行光が入射する場合

例１の条件では、$s_1 = \infty$とおくと、$s_2 = 3$となる。

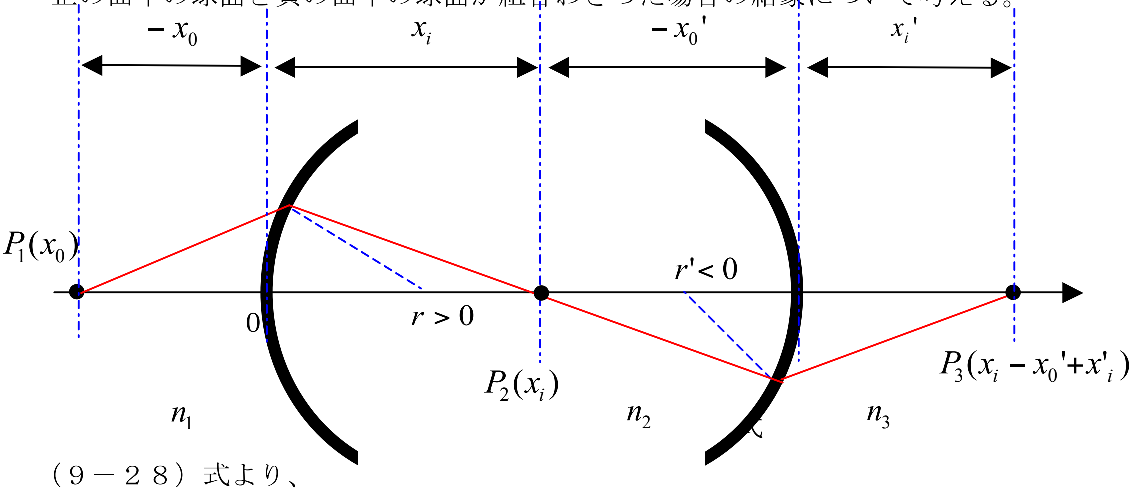
例３の条件では、$x_0 = -\infty$とおくと、$x_i = -3$となる。

それぞれ、半径 r の３倍（$\dfrac{n_2}{n_2 - n_1}$）の位置に実像または虚像ができることになる。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

(b) 薄いレンズの公式

正の曲率の球面と負の曲率の球面が組合わさった場合の結象について考える。



（９－２８）式より、

$$-\frac{n_1}{x_0}+\frac{n_2}{x_i}=\frac{n_2-n_1}{r}$$
$$-\frac{n_2}{x_0'}+\frac{n_3}{x_i'}=\frac{n_3-n_2}{r'} \qquad （９－２９）$$

レンズの厚さ d を以下のように定義する。

$$d=x_i-x_0' \qquad （９－３０）$$

（９－３０）を（９－２９）の第一式に代入すると、

$$-\frac{n_1}{x_0}+\frac{n_2}{x_0'+d}=\frac{n_2-n_1}{r} \qquad （９－３１）$$

ここで、「薄いレンズ」の近似をする。d は他の量に比べて非常に小さいものとする。

すなわち、 $$d<<|x_0|,\ |x_0'|,\ |r|,\ |r'| \qquad （９－３２）$$

この場合、（９－３１）式は、

$$-\frac{n_1}{x_0}+\frac{n_2}{x_0'}=\frac{n_2-n_1}{r} \qquad （９－３３）$$

となるから、これをもちいて、（９－２９）の第二式に代入して x_0' を消去すると以下の式が得られる。

$$-\frac{n_1}{x_0}+\frac{n_3}{x_i'}=\frac{n_3-n_2}{r'}+\frac{n_2-n_1}{r} \qquad （９－３４）$$

レンズの外側は空気であるとして、$n_1=n_3=1$ とし、$n_2=n$ とおくと、

$$-\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_i'}=\frac{1-n}{r'}+\frac{n-1}{r} \qquad （９－３５）$$

が得られる。右辺を焦点距離 f の逆数であると定義する。

Copyright (©) 2010 by kochan@mac.com

$$\frac{1}{f} \equiv \frac{1-n}{r'} + \frac{n-1}{r} \qquad （９－３６）$$

fをもちいて（４－３５）を書き直すと薄いレンズの公式が得られる。

$$-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_i'} = \frac{1}{f} \qquad （９－３７）$$

となり、　$-x_0 \to a, \quad x_i' \to \mathrm{b}$　と置き換えると「レンズの公式」としてよく知られた形になる。