

7. 物質中の電磁波 II

7-1. 2 誘電体間 (吸収のない媒体) の境界平面における電磁波の反射と屈折

右図のように、 $\mathbf{n}_1$ の媒質から $\mathbf{n}_2$ の媒質に角度 θ_1 で電磁波が入射するときの反射・透過の問題を考えよう。この問題は反射や透過の向きを定める運動学的な側面と、強度やエネルギーを考える動力学的な側面がある。

(1) 運動学的な性質: Kinetics

(a) 反射角は入射角に等しい

(b) Snell の法則 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ (2) 動力学的な性質: Dynamics → $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ の境界条件

(a) 反射した放射と屈折した放射の強度

(b) 位相の変化と偏り

(1) Kinetics

$z = 0$ の境界面上 (x y 平面) ではまったく一樣なので、電磁場の方程式の解の x 、 y 方向への依存性は全空間にわたって等しくなければならない。これは、波動ベクトルの x 、 y 成分が入射、反射、透過波まったく同じであることを意味し

ている。したがって、 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}$ 。これから、

$$|\mathbf{k}_1| \sin \theta_1 = |\mathbf{k}_1'| \sin \theta_1' = |\mathbf{k}_2| \sin \theta_2 \quad |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_1'| = \frac{n_1 \omega}{c}, \quad |\mathbf{k}_2| = \frac{n_2 \omega}{c} \text{ を代入。}$$

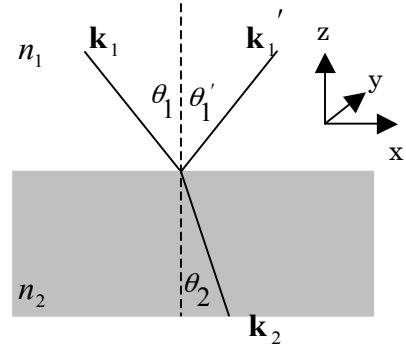
$$n_1 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_1' = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{反射と Snell の法則がでた。//}$$

◎フェルマーの原理による導出 (次章の幾何光学でフェルマーの原理を導出します。)

フェルマーの原理 「最小時間による伝播を光はとる。」

屈折率 $\mathbf{n}_1$ の領域の点 A (座標 (x_1, y_1)) から屈折率 $\mathbf{n}_2$ の領域の点 B (座標 (x_2, y_2)) に至るまでの時間が最小になる境界面上の点 C (座標 $(x_0, 0)$) を求める。

$$\begin{aligned} T &= \overline{AC} \div \frac{c}{n_1} + \overline{BC} \div \frac{c}{n_2} \\ &= \frac{1}{c} n_1 \left\{ \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2} \right\} + \frac{1}{c} n_2 \left\{ \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2} \right\} \\ \frac{dT}{dx_0} &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{2(x_1 - x_0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) n_1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2}} + \frac{2(x_2 - x_0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) n_2}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}} \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c} \left\{ \frac{n_1(x_0 - x_1)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2}} - \frac{n_2(x_2 - x_0)}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}} \right\} \\
&= \frac{1}{c} \{n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2\} = 0 \quad \therefore n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2
\end{aligned}$$

(2) Dynamics 動力学的条件—Maxwell の境界条件

2 種類の物質が平面境界で接している場合を考える。自由電荷や自由電流が存在しないとき、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ の平行成分と $\mathbf{D}$ と $\mathbf{B}$ の垂直成分が連続となる (Maxwell の境界条件)。ここで、 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1', \mathbf{n}_2$ は入射、反射、透過波の波数ベクトルの単位ベクトル、である。

$$\begin{cases}
\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^0 e^{i\mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{x} - i\omega t} & \text{入射波} \\
\mathbf{B}_i = n_1 \frac{\mathbf{n}_1}{c} \times \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{k}_1}{\omega} \times \mathbf{E}_i \\
\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_t^0 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - i\omega t} & \text{屈折波} \\
\mathbf{B}_t = n_2 \frac{\mathbf{n}_2}{c} \times \mathbf{E}_t \\
\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r^0 e^{i\mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{x} - i\omega t} & \text{反射波} \\
\mathbf{B}_r = n_1 \frac{\mathbf{n}_1'}{c} \times \mathbf{E}_1
\end{cases}$$

◎ Maxwell の境界条件 ($\rho = 0, \mathbf{i} = 0$) $\mathbf{n}$ は境界面に垂直な単位ベクトルとする。

$$\omega = \frac{c}{n} |\mathbf{k}| \quad z = 0$$

$$\begin{cases}
\left[\varepsilon_1 (\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{E}_r^0) - \varepsilon_2 \mathbf{E}_t^0 \right] \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{①} \\
\left[\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{k}_1' \times \mathbf{E}_r^0 - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_t^0 \right] \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{②} \\
\left[\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{E}_r^0 - \mathbf{E}_t^0 \right] \times \mathbf{n} = 0 & \text{③} \\
\left[\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{k}_1' \times \mathbf{E}_r^0 - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_t^0 \right] \times \mathbf{n} = 0 & \text{④}
\end{cases}$$

(a) $\mathbf{E}$ は常に $\mathbf{n}$ と垂直 (S 偏光)

① は自動的に成立

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{E}_r^0 - \mathbf{E}_t^0 = 0 & \text{③} \\ n_1 \left(\mathbf{E}_0^1 - \mathbf{E}_0^{1'} \right) \cos \theta_1 - n_2 \mathbf{E}_0^2 \cos \theta_2 = 0 & \text{④} \end{cases}$$

③ $\times n_2 \cos \theta_r$ - ④ を計算すると

$$n_2 \cos \theta_r (\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{E}_r^0) - n_1 \cos \theta_1 (\mathbf{E}_i^0 - \mathbf{E}_r^0) = 0$$

$$r_{12}^s = \left| \frac{\mathbf{E}_r^0}{\mathbf{E}_i^0} \right| = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad \text{---⑤}$$

$$t_{12}^s = \left| \frac{\mathbf{E}_t^0}{\mathbf{E}_i^0} \right| = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad \text{---⑥}$$

(b) $\mathbf{E}$ が入射面内 (P 偏光)

(a) と同様にもとめることができる。

$$r_{12}^p = \left| \frac{\mathbf{E}_r^0}{\mathbf{E}_i^0} \right| = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad \text{---⑦}$$

$$t_{12}^p = \left| \frac{\mathbf{E}_t^0}{\mathbf{E}_i^0} \right| = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_1}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad \text{---⑧}$$

$\theta_i = 0$ の時、(a) と (b) は同じになるべき。 確かめよう。

$$\text{⑤} \quad r^s = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\text{⑥} \quad t^s = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\text{⑦} \quad r^p = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\text{⑧} \quad t^p = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

反射で位相が π ずれていることに注意。原因を考えよ (宿題)。

また、スネルの法則を使うと、⑤と⑦は次のように書き直すことができる。(宿題)

$$r_{12}^s = \left| \frac{\mathbf{E}_r^0}{\mathbf{E}_i^0} \right| = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad r_{12}^p = \left| \frac{\mathbf{E}_r^0}{\mathbf{E}_i^0} \right| = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

次に、逆問題として $\mathbf{n}_2$ の媒質から $\mathbf{n}_1$ の媒質に入射する場合を考える。

このときの反射係数と透過係数を t' , r' とおくと、⑤⑥⑦⑧より、 s 、 p 偏光にかかわらず、もとの t , r との間に下記の関係がある。これをストークスの関係式とよぶ。

$$\begin{aligned} -r &= r' \\ tt' + r^2 &= 1 \end{aligned}$$

7.2. Brewster 角

$n_1 < n_2$ のとき、

$$p \text{ 偏光の場合 } \left| \frac{\mathbf{E}_r^o}{\mathbf{E}_i^o} \right| = 0 \text{ となりうる入射角 } \theta_B \text{ が存在する。}$$

$$\theta_B = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

したがって、この角度で入射すると反射光は完全に S 偏光となる。

Brewster 角はレーザーキャビティ内部での窓の入射角度として使われる。この場合、 p 偏光の反射ロスが高くなり、キャビティから p 偏光でのレーザー発振が生じる。

7.3. 薄膜の透過と反射

最後に、真空中においた厚さ d の薄膜（複素屈折率 n ）に光が入射する場合を考える。この場合、膜中での多重反射を考慮する必要がある。この場合の全体の反射係数 r_{121} と透過係数は無限級数を計算することで、

$$r_{121} = \frac{r_{12}(1 - e^{i\phi})}{1 - r_{12}^2 e^{i\phi}}$$

$$t_{121} = \frac{(1 - r_{12}^2) e^{i\xi}}{1 - r_{12}^2 e^{i\phi}}$$

となる。ただし、

$$\phi = \frac{2d}{\cos \theta_2} \frac{n\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{n} \sin \theta_1 \right)$$

$$\xi = \frac{d}{\cos \theta_2} \frac{n\omega}{c}$$

である。特に、垂直入射の場合は、 $\phi = 2\xi = \frac{2dn\omega}{c}$ となる。

吸収がない周波数領域の場合は、 n は実数であるので、 ϕ も ξ も実数となる。この場合は容易にエネルギー保存則

$$|r_{121}|^2 + |t_{121}|^2 = 1$$

を導くことが可能である。

7.4. エネルギー流の連続性

境界を横切ったエネルギー流が保存していることを示そう。

そのためには、ポインティングベクトルの時間平均の z 方向への射影が連続であることを示せばよい。

(復習)

ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ は単位時間に単位面積を
通って流れる電磁場のエネルギー流束をあらわす。

$\mathbf{E}, \mathbf{H}$ を複素数として扱う場合は、**複素ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ の実部が
エネルギー流束の時間平均をあたえる**。したがって、 $\mathbf{S}$ の向きを単位ベクトル l であら
わすと、エネルギー流束は、

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{Re}\left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}^0|^2 l = \frac{1}{2} n \frac{1}{Z_0} |\mathbf{E}^0|^2 l$$

であたえられる。ここに $n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ は屈折率（非磁性体を考え、 $\mu = \mu_0$ とする。）、 Z_0 は真

空中のインピーダンス $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.7 \Omega$ である。

ちなみに、エネルギー密度の時間平均は

$$u = \frac{1}{4} \left[\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right] = \frac{1}{2} \varepsilon |\mathbf{E}^0|^2 \quad \text{とあたえられ、} |\bar{\mathbf{S}}| = \frac{c}{n} u \text{ という関係式が導かれる。}$$

これはエネルギーの流れの速さが、平面波の場合は $\frac{c}{n}$ であることを示している。

角度 θ で面に入射している場合は、面を通過するエネルギー流束は面ベクトルへの射影であたえられる。したがって、単位時間当たり単位面積あたりに面を通過するエネルギー流

束の時間平均は、

$$I = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} |\mathbf{E}^0|^2 \cos \theta$$

とあたえられる。 (注) 電力の式 $P = IV = \frac{V^2}{R}$ とのアナロジー。R と Z の関係

入射光、反射光、透過光の単位時間当たり単位面積あたりに面を通過するエネルギー流束の時間平均は、

$$\text{入射光強度} \quad I_i = \frac{n_1}{Z_0} |\mathbf{E}_i^0|^2 \cos \theta_i$$

$$\text{反射光強度} \quad I_r = \frac{n_1}{Z_0} |\mathbf{E}_r^0|^2 \cos \theta_i$$

$$\text{透過光強度} \quad I_t = \frac{n_2}{Z_0} |\mathbf{E}_t^0|^2 \cos \theta_r$$

であたえられるので、p 偏光の場合以下のように計算される。

$$\begin{aligned} I_r + I_t &= \left\{ \frac{n_1}{Z_0} |r_{12}|^2 \cos \theta_i + \frac{n_2}{Z_0} |t_{12}|^2 \cos \theta_r \right\} |\mathbf{E}_i^0|^2 \\ &= \left\{ \frac{n_1}{Z_0} \left(\frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_r}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_r} \right)^2 \cos \theta_i + \frac{n_2}{Z_0} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_r} \right)^2 \cos \theta_r \right\} |\mathbf{E}_i^0|^2 \\ &= \frac{n_1}{Z_0} \cos \theta_i |\mathbf{E}_i^0|^2 = I_i \end{aligned}$$

したがって、エネルギー反射率として $\rightarrow T + R = 1$

ただし、エネルギー透過率 T、反射率 R は下記のように定義される量である。

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2}{n_1} t^2 \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_r}{(n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_r)^2}$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r^2 = \left(\frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_r}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_r} \right)^2$$

8. 物質中の電磁波 III

(a) 全反射

スネルの法則

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$$

光学的に厚いもの（ n 大）から薄いもの（ n 小）に入射する場合を考える。すなわち、 $n_1 > n_2$ とすると、 $\theta_2 > \theta_1$ である。
 $\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \geq 1$ となる θ_1 が存在する。この場合はどうか？

ここで、 $\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 = 1$ をみたす θ_1 を臨界角 θ_c と呼ぶ。

例（臨界角） ガラス $n_1 = 1.5$ 空気 $n_2 = 1$ の場合 $\theta_c = 41.8^\circ$

◎ θ_1 が θ_c より大のとき、 θ_2 は実数でなくなる。

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \geq 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta_2 = 1 - \sin^2 \theta_2 < 0$$

$$\cos \theta_2 \text{ は純虚数になる。 } \cos \theta_2 = \pm i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1}$$

反射係数は複素数になる。それぞれの振幅は、

$$\left| r_{12}^s \right| = \left| \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \right| = 1, \quad \left| r_{12}^p \right| = \left| \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \right| = 1$$

1 である。これは全反射を意味する。反射係数の位相を $r^s = e^{i\theta_s}$ 、 $r^p = e^{i\theta_p}$ とおくと、

s、p 偏光での反射光の位相差 $\theta = \theta_p - \theta_s$ は、下記のように計算される。

$$\begin{cases} \tan \frac{\theta_s}{2} = \frac{-\sqrt{\sin^2 \theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_1} \\ \tan \frac{\theta_p}{2} = \frac{-\sqrt{\sin^2 \theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_1} \end{cases}$$

したがって、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2 \theta_1}$$

この左辺は $\theta_1 = \pi/2$, θ_c のとき 0 になる。

極大値は $\frac{d\left(\tan \frac{\theta}{2}\right)}{d\theta_1} = 0$ より $\sin^2 \theta_1 = \frac{2n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$ の場合であり、そのときの位相差の最大

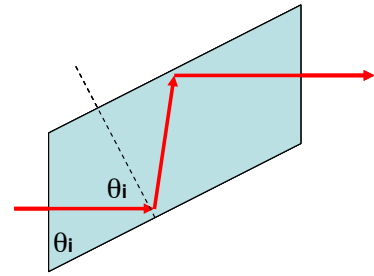
値は $\tan \frac{\theta_m}{2} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1 n_2}$ であたえられる。

例 フレネルロム (計算を確かめよ)

θ_1 の角をもつ菱形 (ロム) をつかって、側面から 45 度偏光の光を垂直入射し、内部全反射を 2 回使って遅相子がつくれる。例えば、 $\lambda/4$ 波長板 (直線偏光 → 円偏光) の場合、

全体の位相差が $\theta_m = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち、 $\theta_m = \frac{\pi}{4}$ とすればよい。

この場合、 $n_1 = 1.5$ の材料を、 $\theta_1 = 51.8^\circ$ でつかえばよい。



(b) 全反射におけるエバネッセント波

$\theta_1 \gg \theta_c$ の場合

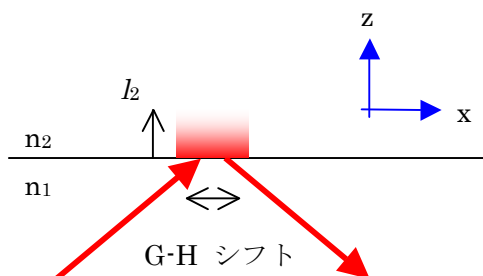
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t e^{i(k_2 \sin \theta_t x + k_2 \cos \theta_t z) - i\omega t}$$

$$= \mathbf{E}_t e^{i\left(k_2 x \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_1 \pm k_2 z \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1}\right) - i\omega t}$$

$$= \mathbf{E}_t e^{i\left(k_2 x \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right) - i\omega t} e^{\mp k_2 z \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1}}$$

+符号は z 方向に増加するのでおかしい。したがって、-符号のみをとる。

これは z 方向に指数関数的に減衰する波を表している。(エバネッセント波)



しみ出し長 $l_2 = k_2^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1} \right)^{-1} \approx \lambda_2$ は光の波長程度である。

X 方向には波数 $\frac{n_1}{n_2} k_2 \sin \theta_1$ で伝播する波である。この波数の大きさを考える。

$$n_1 = 1.5 \quad n_2 = 1 \text{ (空気)} \quad \theta_1 = 51.8^\circ \text{ で}$$

$$\frac{n_1}{n_2} k_2 \sin \theta_1 = \frac{n_1}{n_2} n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_1 = 1.18 \frac{\omega}{c}$$

エバネッセント波は空気中を伝播するにもかかわらず空気中の波数より大きい波数をもつ。

◎ グースヘンシェンシフト

全反射 $\theta_1 \gg \theta_c$ においては、Phase shift がある。→ 光束も横方向にシフト

これをグースヘンシェン (G-H) シフトとよぶ。

(c) 光のトンネル効果

以下、TM 波のみ考える。(p 偏光) 下記のような 2 境界の透過、反射の問題を考える。

とりあえず、全反射を考えない。

最終的には入射角を臨界角以上にする。

領域①→②

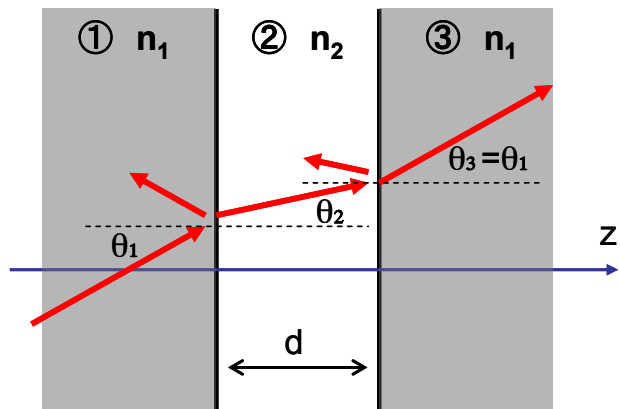
$$\begin{cases} t_{12} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \\ r_{12} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \end{cases}$$

領域②→③

$$\begin{aligned} n_1 &\rightarrow n_2 & \theta_1 &\rightarrow \theta_2 \\ n_2 &\rightarrow n_1 & \theta_2 &\rightarrow \theta_1 \end{aligned}$$

とすればよい。

$$\begin{cases} t_{23} = \frac{2n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} \\ r_{23} = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} \end{cases}$$



実は①→②、②→③は逆過程なので、 $t_{23} = t'_{12}$ $r_{23} = r'_{12}$ である。

確認すると (Stokes の定理)

$$\text{明らかに } r_{23} = -r_{12}$$

$$t_{12} t_{23} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2)^2} = 1 - r_{23}^2$$

この問題は、以前やった多重反射の問題と取り扱いとはまったく同じ。

故に、透過光は下記のようになる。

$$\mathbf{E}_t = \frac{1-r^2}{1-r^2 e^{i\phi}} e^{i\frac{\xi}{2}} \mathbf{E}_0 \quad \phi = 2d \frac{n_2 \omega}{c} \cos \theta_2$$

したがって、透過率は以下のようにかける。

$$\begin{aligned} T &= \left| \frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_0} \right|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{1-2r^2 \cos \phi + r^4} & \cos \phi &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ &= \frac{(1-r^2)^2}{1+r^4-2r^2+4r^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{1+\frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}} \\ &= \frac{1}{1+\left\{ \frac{n_2^2 \cos^2 \theta_1 - n_1^2 \cos^2 \theta_2}{2n_1 n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2} \sin \frac{\phi}{2} \right\}^2} = \frac{1}{1+\left\{ \frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \sin \frac{\phi}{2} \right\}^2} \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} k_1 = \frac{\omega}{c} n_2 \cos \theta_1, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} n_1 \cos \theta_2, \quad \phi = \frac{2d\omega}{c} n_2 \cos \theta_2 = 2 \frac{n_2}{n_1} k_2 d.$$

ここから入射角が臨界角以上になった場合を考える。

この場合、②の領域はエバネッセント波だけが存在する。前項と異なるのは、+z、-zの両方向のエバネッセント波が存在することである。この場合、 $\cos \theta_2$ は純虚数となるので、

$$k_2 \text{ も純虚数となる。} \frac{n_2}{n_1} k_2 = i\eta, \quad Q = \frac{k_1^2 + \eta^2}{2k_1 \eta} \quad (\eta, Q \text{ は共に実数}) \text{ とおくと、}$$

透過率の式は下記のようになる。この中にはもはや、虚数は含まれていない。

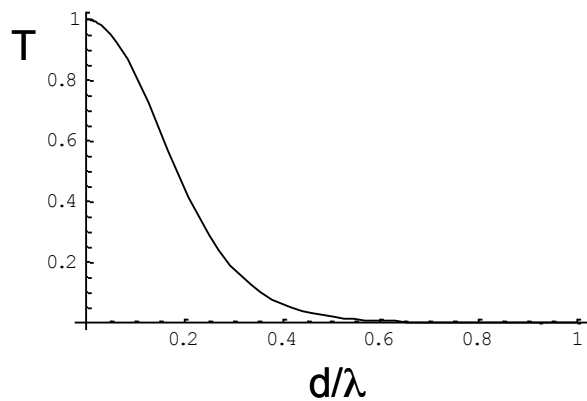
$$T = \frac{1}{1 + \{Q \sinh(\eta d)\}^2}$$

η 、 Q は入射角や媒質の屈折率で決まる量である。距離 d を変えたときにどうなるか

考えてみる。

右図は、 $n_1 = 1.5$ $\theta_1 = 51.8^\circ$ の場合の計算結果である。

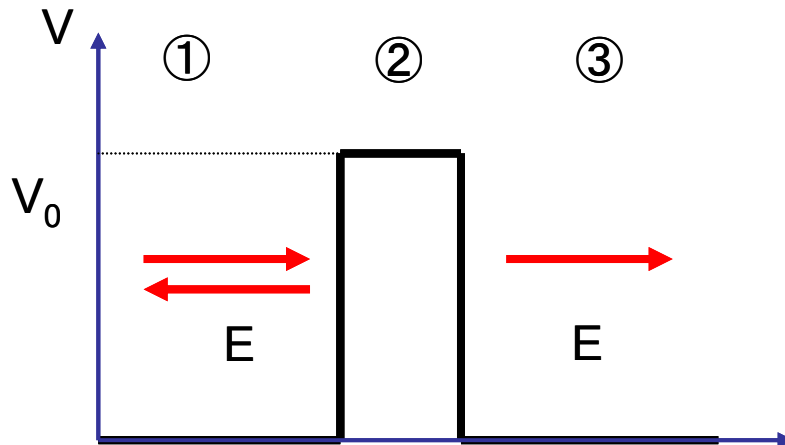
横軸は波長を単位にした距離。波長の半分ぐらいの距離まで物体を離す



と透過しなくなることがわかる。

(発展問題)

量子力学のトンネル問題との対応



この、光のトンネル現象は、ポテンシャル V_0 に運動エネルギー E の粒子があたり、トンネル透過する量子力学の問題と等価である。

②の領域で波数が虚数になってしまう点は下記の対応になっている。古典的には全反射するエネルギー領域での透過問題！

$$k_2^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_1 \cos \theta_2 \right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{\hbar} \right)^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$$

前頁で求めた透過率の表式において下記の入れ替えをおこなうとまったく同じ答えとなることを確認せよ！！

$$\eta = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$Q = \frac{k_1^2 + \eta^2}{2k_1\eta}$$