

2. 真空中の Maxwell 方程式 II

2-1 スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

-真空中の Maxwell 方程式の一般解-

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Tips! 任意のベクトル \mathbf{A} 、およびスカラー Φ に対して、

$$\text{恒等式 } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (2-1)$$

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0 \quad (2-2)$$

ρ , \mathbf{i} などの湧き出し（源）が存在する場合には、前回に波動方程式を出したように、簡単な場に関する微分方程式を導けない。そこで場をポテンシャルによってあらわして、ポテンシャルの満たすべき微分方程式を考える。

1st step

$$(1.3) \text{より出発。}(2.1) \text{より } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3)$$

のようにベクトルポテンシャル \mathbf{A} を定義する。 \mathbf{A} は下記のような不定性がある。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad \text{ここで } \chi \text{ は任意のスカラー} \quad (2.4)$$

ゲージ不定性**2nd step**

(1.2) のファラデーの法則に(2.3)を代入

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

(2.2)より、 $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$ のようなスカラーポテンシャル ϕ が定義できる。

$$\text{故に } \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.5)$$

(2.5)で(2.4)の不定性を考えると、

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \nabla \chi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla\left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} \quad \text{ここで } \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (2.6) \quad \text{とおくと} \\
&= -\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}
\end{aligned}$$

(2.5)と同じ式になった。

したがって、(2.4)で(2.6)の変換に対して \mathbf{B} , \mathbf{E} が不変であることがわかる。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (2.4)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (2.6)$$

この変換を **ゲージ変換** と呼ぶ。

Tips ! ところで、 χ はどんなスカラー関数でもよいのだろうか？

$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi$ から、 \mathbf{A} の発散を利用して決定することが多い。 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ をクーロンゲージとよぶ。

3rd step

これまで二つの式から $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (2.3)

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.5) \quad \text{と書けた。}$$

残りの2式から \mathbf{A} と ϕ が満たす微分方程式を求めればよい。

Gauss の法則 (1.1)'

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

4th step

Ampère の法則 (1.4)' より

$$\begin{aligned}
c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{i}}{\epsilon_0} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\
c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{\mathbf{i}}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} \\
c^2 (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}) &= \frac{\mathbf{i}}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}
\end{aligned}$$

ここで適当なゲージ変換をおこなって、 \mathbf{A} と ϕ が $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ (2.8)

となるようにする。

ローレンツゲージ

ローレンツゲージをみたす(2.4)(2.6)の χ はどのような方程式を満たすか？

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

ローレンツゲージの条件(2.8)の左辺にゲージ変換を代入。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' - \nabla^2 \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi$$

\mathbf{A}' と ϕ' はローレンツゲージの条件を満たすとすると、

$$\boxed{\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi = 0}$$

の場合に、もとの \mathbf{A} と ϕ もローレンツゲージの条件を満たすことになる。

χ は

すなわち、波動方程式をみたす χ が必要である。

Gauss の法則と Ampère の法則から下記のポテンシャルに関する微分方程式が得られる。

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{i}}{c^2 \epsilon_0} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \boxed{\text{ローレンツゲージ}}$$

(2.9)、(2.10)は共に非同次 “ヘルムホルツ方程式！”

Final Stage

ここから(2.9)と(2.10)を解いて ϕ と \mathbf{A} を求める。

$$\text{一般的に、} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = -4\pi f(x, t) \quad (2.11) //$$

↑ 源

これは下記をみたす Green 関数を用いて、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^{(\pm)}(x; t; x', t') = -4\pi \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (2.12)$$

解けばよい。

右辺はデルタ関数であるから、 (x', t') の場所にある局所源が (x, t) に、いかなる場を作るかを記述する。したがって(2.11)の特解は

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int G^{(\pm)}(\mathbf{x}; t; \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t') d^3 x' dt' \quad \text{となる。}$$

例。境界がない自由空間の場合

相対時間 $\tau = t - t'$ 、相対距離 $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ だけの関数である。

また等方的なので球対称、すなわち $|\mathbf{R}|$ のみの関数となるべき。

$\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG)$ をもちいると、グリーン関数の満たすべき式は

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G^\pm(k, \omega) = -4\pi \delta(R)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG^\pm(R)) + K^2 G^\pm(R) = -4\pi \delta(R)$$

$$R \neq 0 \quad \text{で} \quad \frac{d^2}{dR^2} (RG^\pm(R)) + K^2 (RG^\pm(R)) = 0$$

$$\boxed{G_k^\pm(R) = \frac{1}{R} e^{\pm i k R} \quad (2.13)}$$

一般解 $G_h^-(R) = A G_k^{(+)}(R) + B G_k^{(-)}(R) \quad \boxed{A + B = 1}$

\downarrow 原点から外に広がる球面波 \downarrow_k 収束する球面波

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad \delta(-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$\omega' = -\omega \quad d\omega' = -d\omega$$

$$\delta(-\tau) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega'\tau} (-d\omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega'\tau} d\omega' = \delta(\tau)$$

ω に関してフーリエ逆変換すると、

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int G_k^\pm(R) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad \leftarrow k \text{ は } \frac{\omega}{c} \text{ であることに注意}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{\pm i k R}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{R} e^{\pm i\omega \frac{R}{c}} e^{-i\omega\tau} d\omega$$

↑ デルタ関数

$$= \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) \quad (2.14)$$

$$\therefore G^{\pm}(R, \tau) = \frac{\delta\left(t - t' \pm \frac{|x - x'|}{c}\right)}{|x - x'|} = \frac{\delta\left(-t' + \left[t \mp \frac{|x - x'|}{c}\right]\right)}{|x - x'|}$$

$$= \frac{\delta\left(t' - \left[t' \mp \frac{|x - x'|}{c}\right]\right)}{|x - x'|} \quad (2.15)$$

$$t' = t \mp \frac{|x - x'|}{c} \quad t \text{ は現在の時間}$$

$G^{(+)}$ は現在より前の時間

$G^{(-)}$ は現在より後の時間 の源による解。

因果律の話—前者を遅延グリーン関数 (Retarded Green fn.)

後者を先延グリーン関数 (Advanced Green fn.) と呼ぶ。

このグリーン関数を用いると、非同次ヘルムホルツ方程式(2.11)の特解は、

$$\varphi^{(x,t)} = \int \int G^{\pm}(x, t; x', t') f(x', t') d^3 x' dt' \quad (2.16)$$

となる。 $f(x', t')$ は $t' = 0$ の近傍でのみ 0 でないとすると、 $t \rightarrow -\infty$ では(2.11)の右辺=0 の同次方程式の解となる。この源がない場合の解を $\varphi_{in}(x, t)$ としよう。この場合、時間がたつて源が work し出すと源から波が生成される。この場合、遅延グリーン関数を用いた

$$\varphi(x, t) = \varphi_{in}(x, t) + \int \int G^{(+)}(x, t; x', t') f(x', t') d^3 x' dt' \quad (2.17)$$

が解となる。 $t \rightarrow -\infty$ で $\varphi_{in}(x, t) = 0$ という最も簡単な場合には、源からの因果律が考慮された下記の解となる。 t' に関する積分は実行して、

$$\varphi(x, t) = \int \frac{[f(x', t')]_{ret}}{|x - x'|} d^3 x' \quad (2.18)$$

$[f(x', t')]_{ret}$ は時間 t' として遅延時間 $t' = t - \frac{|x - x'|}{c}$ を用いることを示す。

以上から、ポテンシャル ϕ, \mathbf{A} の解は、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho(x', t')]_{ret}}{|x - x'|} d^3 x' \quad (2.19)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{[\mathbf{i}(x', t')]_{ret}}{|x - x'|} d^3 x' \quad (2.20)$$

となる。

2-2. 電磁場におけるエネルギー密度とエネルギー流

1884年はPoyntingによる議論

相対論においては“全世界的”な保存則は成立しない。局所的な保存則のみ意味がある。

例 $\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 電荷の消失は電流の外部への流れを意味する。

(電荷保存例)

電磁気におけるエネルギー保存を定量的に書き表してない。

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

のような式が構築できればよい。

ここで u は電磁場のエネルギー密度、 \mathbf{S} は電磁場のエネルギー流（単位時間に単位面積あたりを通過するエネルギー量）である。 u, \mathbf{S} はこれから以下での議論から定義される。

ところで、この保存式は一般には成立しない。

例えば ・ 暗い部屋でスイッチを入れたらライトがつく。

フィラメント→黒体輻射→光

・ 荷電粒子の電磁場による加速運動

物質に対する仕事を含まなければならない。以下では荷電粒子にする仕事を考慮して議論を進める。

ローレンツ力 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

↑ 粒子の charge

単位体積に N 個の粒子 N 倍

仕事率 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \underline{Nq\mathbf{v}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{E}$ (2.21)

↑ \mathbf{i}

したがって $-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.22)$$

\mathbf{S} と u の表式を左辺から推察する。Maxwell 方程式(1.4), (1.3)から、

$$\mathbf{i} = \varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.23)$$

ここで 一方

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}}$$

$$= -\varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

↑ Faraday(1.2)を使うと

$$= -\varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$= -\varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right\}$$

したがって、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = -\varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right\} \quad (2.24)$$

この表式から

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.25) \quad S \text{ はポインティングベクトル}$$

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (2.26)$$

とすればうまくいく。(2.26)は静電場、静磁場のエネルギーと一致

ただし場のエネルギー $u = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ は定数分だけ不定。

2-3. エネルギー流の例

例1 電磁波

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \quad |B| = \frac{|E|}{c} \quad \text{よって} \quad |\mathbf{S}| = \varepsilon_0 c^2 \cdot |B||E| = \varepsilon_0 c |E|^2$$

$$\begin{aligned} \text{一方} \quad u &= \frac{\varepsilon_0}{2} |E|^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} |B|^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} |E|^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \frac{|E|^2}{c^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}|E|^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \frac{|E|^2}{c^2} = \epsilon_0 |E|^2$$

単位時間、単位面積あたりの量にするには、速さ c でかければよい。

$$\therefore uc = \epsilon_0 c |E|^2$$

これは $|\mathbf{S}|$ と同じである。

例2 充電しつつあるキャパシタ

円盤状のキャパシタ → 円周状に磁場が存在

ちょうど外周上での磁場の大きさは

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{より、}$$

$$2\pi a c^2 |\mathbf{B}| = \pi a^2 |\dot{E}| = \pi a^2 \dot{E} \quad (\text{簡単に})$$

$$|B| = \frac{a}{2c^2} \dot{E}$$

よって、ポインティングベクトルは極板間と外から内向きに

$$\text{大きさ } |\mathbf{S}| = \epsilon_0 c^2 |\mathbf{E}||\mathbf{B}| = \frac{a\epsilon_0 c^2}{2c^2} E \dot{E} = \frac{a\epsilon_0}{2} E \dot{E}$$

外側の面積は $2\pi ah$ であるから、全流入量は $\pi a^2 \epsilon_0 h E \dot{E}$ となる。

一方、極板間の電場 E は一定と見なせるから、全エネルギーは

$$U = \pi a^2 h \times \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \text{ であり、そのエネルギーの変化は } \frac{du}{dt} = \pi a^2 h \epsilon_0 E \dot{E}$$

やはり上記と一致する。

★ 電磁場のエネルギーは極板間から流入する点がおもしろい。

以下の2つは授業を良く思い出してください。

例3 導体電線中を電流が流れているときの \mathbf{S} と \mathbf{u}

$$i = \sigma E \quad \text{オームの法則}$$

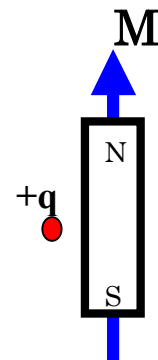
発熱してくるエネルギーはどこから流入してくるか論ぜよ。

例4 下図のように棒磁石の隣に電荷 q をそっと置いたときの

\mathbf{S} を図示せよ。この磁石の磁化を一瞬にして

消失させると何がおきるか？

その現象は何を意味するか？



2-4. 電磁場の運動量

電磁場にエネルギー流が存在するとき、物体に運動量を与えることができる。たとえば、電磁波の一種である光を鏡で完全反射させると、鏡は光の進行方向の向きに運動量を受け取る。

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

を電磁場の運動量とよぶ。

(問) 自由空間を伝わる電磁波の場合の運動量について考察せよ。