12．光散乱

12.1　振動する局所的な湧き出しによる場と放射

Maxwell 方程式
$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{B}=\mathbf{0} \\ c^2\nabla\times\mathbf{B}=\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}+\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

ρ 、$\mathbf{j}$ は $x=0$ の近傍に局所的に存在するものとする。
調和関数的な時間変化の湧き出しを考える。

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x},t)=\rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t)=\mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \end{cases}$$

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x},t)$

$$\begin{cases} \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \\ \mathbf{E}=-\nabla\phi-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \end{cases} \qquad \mathrm{A}(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\displaystyle\int\dfrac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \\ t'=t-\dfrac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c^2} \end{cases}$$
遅延ポテンシャル

十分遠方で $\rho=0$ 、$\mathbf{j}=0$ では、

$$\mathbf{E}=\frac{i}{k\mu_0}Z_0\nabla\times\mathbf{B}=i\frac{c}{k}\nabla\times\mathbf{B} \qquad \text{ただし } Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

遅延ポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int d^3x'\int dt\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta\left(t'-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}-t\right)$$

と書き換えることが出来る。時間積分を実行すると、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int d^3x'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

遠方領域　$kr\rangle\rangle 1$

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|=\mathbf{r}-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}' \qquad \mathbf{n}\text{ は }\mathbf{x}\text{ 方向の単位ベクトル}$$

このとき⑩は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-ik\,\mathbf{n}\,?\,\mathbf{x}'}\mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3x'$$ r のみに依存する球面波

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_n\frac{(-ik)^n}{\mathrm{n}!}\int(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})^n\mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3x'$$

n=0 のみを採用する（双極子近似）

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3x'$$

$$\int \mathrm{J}(\mathbf{x}')d^3x=-\int\mathbf{x}'(\nabla'\cdot\mathbf{J})d^3x'$$

$$=-i\omega\underline{\int\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')d^3x'}$$

$$=-i\omega\mathbf{P}$$

この場合

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=-\frac{i\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\mathbf{P}\frac{e^{ikr}}{r}$$ 球面波

$$\begin{cases}\mathbf{B}=\dfrac{k^2}{4\pi}Z_0(\mathbf{n}\times\mathbf{P})\dfrac{e^{ikr}}{r}\\[2ex]\mathbf{E}=Z_0\dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{n}=c\mathbf{B}\times\mathbf{n}\end{cases}\qquad Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$ 真空のインピーダンス

振動する双極子モーメント **P** が単位時間、単位立体角あたりに放射する
エネルギーの時間変化は

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\Omega}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathrm{r}^2\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]$$

双極子放射

$$=\frac{c^2Z_0}{32\pi^2}k^4|\mathbf{P}|^2\sin^2\theta$$

12.2　長波長における散乱

A.　小散乱体面に誘導される双極子による散乱

外場 $\mathbf{E}\rightarrow\mathbf{P}=\varepsilon_0\alpha\mathbf{E}\rightarrow\mathbf{J}_{分極}=\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\rightarrow\mathbf{J}_{分極}$ により電磁波が放射

入射 $\begin{cases}\mathbf{E}_{in}=\mathbf{e}_0E_0e^{ik\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{x}}\\\mathbf{H}_{in}=\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}_{in}/Z_0\end{cases}$　放射 $\begin{cases}\mathbf{E}_{sc}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}k^2\dfrac{e^{ikr}}{r}[(\mathbf{n}\times\mathbf{P})\times\mathbf{n}]\\\mathbf{H}_{sc}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{sc}/Z_0\end{cases}$

（外部の比誘電率は１とする）

偏り $\mathbf{e}_0$ で方向 $\mathbf{n}_0$ の単位入射エネルギー流速当たりに、偏り $\mathbf{e}$ で方向 $\mathbf{n}$ に単位立体角、単位時間当たりに放出されるエネルギー（微分散乱断面積）は

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\left(\mathbf{n},\mathbf{e};\mathbf{n}_{0,}\mathbf{e}_0\right)=\frac{\gamma^2\frac{1}{2Z_0}\left|\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_{sc}\right|^2}{\frac{1}{2Z_0}\left|\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_{in}\right|^2}=\frac{k^4}{\left(4\pi\varepsilon_0 E_0\right)^2}\left|\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{P}\right|^2$$

$$\left(\begin{array}{l}\omega=ck:\omega^4\text{依存性}\\ \left|\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{P}\right|:\text{偏光依存性}\end{array}\right.\qquad\left(\because\left|\mathbf{S}\right|=\frac{\varepsilon_0 c}{2}\left|\mathbf{E}\right|^2=\frac{1}{2Z_0}\left|\mathbf{E}\right|^2\right)$$

B.　小誘電体による散乱

$$\sigma_{pol}=3\varepsilon_0\left(\frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2}\right)\left|\mathbf{E}_0\right|\cos\theta$$

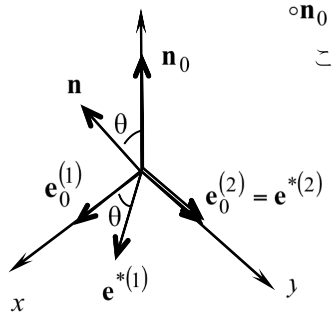
$$=3\varepsilon_0\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)\left|\mathbf{E}_0\right|\cos\theta$$

$\mathbf{e}_0$ は入射電磁場 $\mathbf{E}_0$ の単位方向ベクトル

$\mathbf{e}^*=\left(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_0\right)\times\mathbf{n}$

∘$\mathbf{n}_0$ と $\mathbf{n}$ で張る面を散乱面と呼ぶ

この場合は xz 面



$$\mathbf{P}=4\pi\varepsilon_0\frac{n^2-1}{n^2+2}a^3\mathbf{E}_0$$

この場合

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\propto k^4a^6\left|\frac{n^2-1}{n^2+2}\right|^2\left|\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}_0\right|^2$$

$$\mathbf{e}^*=\left(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_0\right)\times\mathbf{n}=\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{e}_0-\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_0\right)\mathbf{n}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{e}^{*(1)}=\mathbf{e}_0^{(1)}-\mathbf{n}\sin\theta\\ \mathbf{e}^{*(2)}=\mathbf{e}_0^{(2)}\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ll}\frac{\partial\sigma_{/\!/}}{\partial\Omega}=k^4a^6\left|\frac{n^2-1}{n^2+2}\right|^2\cos^2\theta & \leftarrow\mathbf{e}_0^{(1)}\text{での入射}\\ \frac{\partial\sigma_{\perp}}{\partial\Omega}=k^4a^6\left|\frac{n^2-1}{n^2+2}\right|^2 & \leftarrow\mathbf{e}_0^{(2)}\text{での入射}\end{array}\right.$$

$$\therefore\theta=\frac{\pi}{2}\ \text{で}\ \frac{\partial\sigma_{\perp}}{\partial\Omega}=0$$

例．青空は偏光している。どの向きに偏光しているか？上の議論をもちいて述べよ。

（ヒント：太陽との位置関係を考える。青空は空気中の窒素や酸素分子による散乱）

12.3.　誘電率の揺らぎによる電磁波の散乱

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

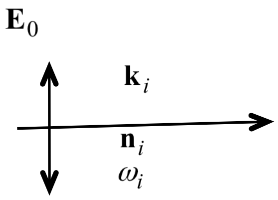
リアルな電荷、電流なし。誘導電流（誘導電荷）のみを考慮する。

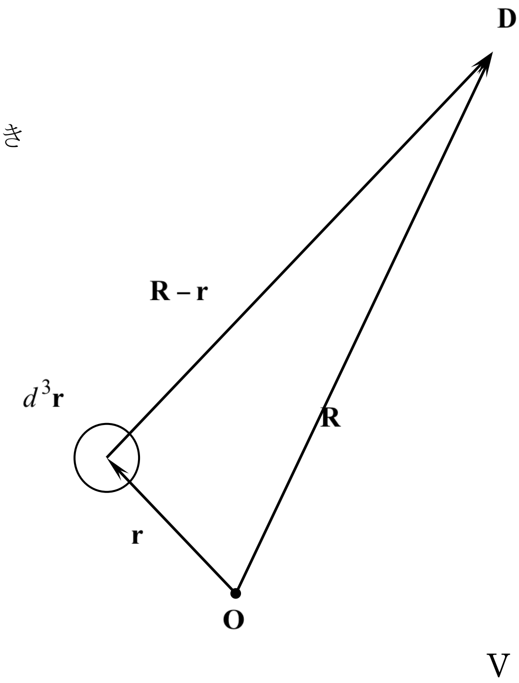
この方程式は入射波と散乱光の和について成立するべき

入射　$\mathbf{E_i}$　$\mathbf{D_i}$　$\mathbf{H_i}$　$\mathbf{B}_i$

散乱　$\mathbf{E_s}$　$\mathbf{D_s}$　$\mathbf{H_s}$　$\mathbf{B}_s$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E_i} + \mathbf{E_s} \\ \mathbf{D} = \mathbf{D_i} + \mathbf{D_s} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H_i} + \mathbf{H_s} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B_i} + \mathbf{B_s} \end{cases}$$





E_s 等は小さいと考えて逐次近似的に

E_s 等の満たすべき方程式を導く。

0th order

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}_i = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_i = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_i = -\dfrac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}_i = \dfrac{\partial \mathbf{D}_i}{\partial t} \end{cases}$$

この物体の誘電率 ε は空間的にも
時間的にも揺らいでいるものとする。

$$\begin{cases} \mathbf{D}_i = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}_i \\ \mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{H}_i \\ \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0(\varepsilon\,\mathrm{I} + \delta\varepsilon(\mathbf{r},t))$$

I:単位テンソル

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r},t) \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon \qquad \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r},t) \rangle = 0$$

$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ より

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_i}{\partial t^2}$$

$$\therefore \Delta \mathbf{E}_i - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}_i}{\partial t^2} = 0 \qquad \left(k_i = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\omega_i \right)$$

1th order

平面派の入射に関して、誘電率の揺らぎを摂動として１次まで取り込んで計算する（ボルン近似）

$$\varepsilon = \varepsilon + \delta\varepsilon$$

によって E_s が生成される。E_s はδの order

全体の場についても同様に

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}$$

が成立し、$\mathbf{E}_i$ の成分に関しては等式が成立するので

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_s}{\partial t^2}$$

も成立する。ここで

$$\begin{aligned}\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r},t)\mathbf{E} &= \varepsilon_0 (\varepsilon + \delta\varepsilon(\mathbf{r},t))(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) \\ &= \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_i}_{\mathbf{D}i} + \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_s + \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r},t)\mathbf{E}_i + \underbrace{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r},t)\mathbf{E}_s}_{\delta^2 \text{の} order}\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_s = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_s + \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r},t)\mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon}\mathbf{D}_s - \frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r},t)}{\varepsilon}\mathbf{E}_i \qquad \cdots(☆)$$

$$\Delta \mathbf{D}_s - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{D}_s}{\partial t^2} = -\nabla \times \nabla \times \{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r},t)\mathbf{E}_i\}$$

ヘルツベクトル(Hertz vector)

$$\mathbf{D}_s = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}$$

$$\Delta \mathbf{\Pi} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = \underbrace{-\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r},t)\mathbf{E}_i}_{\text{湧き出し}}$$

この式は以前に見たことがある。湧き出しがある場合のベクトルポテンシャルが満たすしきだ！故に

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varepsilon_0\delta\varepsilon(\mathbf{r},t')\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t')}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}d^3\mathbf{r}$$

$$t'=t-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}|\mathbf{R}-\mathbf{r}|$$

これを用いて

$$\mathbf{D}_s(\mathbf{R},t)=\nabla_R\times\nabla_R\times\left[\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varepsilon_0\delta\varepsilon(\mathbf{r},t')\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t')}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}d^3\mathbf{r}\right]$$

電場 $\mathbf{E}_s$ はこの $\mathbf{D}_s$ からの成分と(☆)における右辺第 2 項からの寄与がある。散乱体に近い場合は第 2 項は有効だが、R がより十分に離れていれば 0 だ。

そのような離れた場所での「散乱場」を考える。ここで、$\mathbf{n_i}$ は入射偏光の単位ベクトルである。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s(\mathbf{R},t)&=\nabla_R\times\nabla_R\times\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r},t')\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t')}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}d^3\mathbf{r}\right]\\&=\nabla_R\times\nabla_R\times\left[\frac{E_0}{4\pi\varepsilon}\int\frac{(\delta\varepsilon(\mathbf{r},t'):\mathbf{n_i})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}-i\omega_i t'}d^3\mathbf{r}\right]\end{aligned}$$

揺らぎテンソル $\delta\varepsilon(\mathbf{r},t')$ の時間フーリエ変換を考える

$$\underbrace{\delta\varepsilon(\mathbf{r},t')}_{\text{テンソル}}=\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\,\underbrace{\delta\varepsilon(\mathbf{r},\omega)}_{\text{テンソル}}e^{i\omega t'}$$

さらに遠方近似

$$\begin{pmatrix}|\mathbf{R}-\mathbf{r}|=|\mathbf{R}|-\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}}_s \quad \hat{\mathbf{k}}_s=\dfrac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}\\ t'=t-\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{c}(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{k}}_s\end{pmatrix}$$

を行うと、散乱波

$$\begin{pmatrix}\omega_s=\omega_i-\omega\\ \mathbf{k}_s=\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{c}(\omega_i-\omega)\hat{\mathbf{k}}_s=\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\omega_s\hat{\mathbf{k}}_s \quad \hat{\mathbf{k}}_s=\dfrac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}\\ \mathbf{q}=\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_s\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R},t)=\frac{E_0}{4\pi\varepsilon}e^{-i\omega_i t}\nabla_R\times\nabla_R\times\left[\int\frac{d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}e^{i\left(\mathbf{k}_i-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\frac{(\omega_i-\omega)}{\omega_s}\hat{\mathbf{k}}_s\right)\cdot\mathbf{r}}\times\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega e^{i\omega t}\left(\delta\varepsilon(\mathbf{r},\omega):\mathbf{n_i}\right)e^{i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}(\omega_i-\omega)\hat{\mathbf{k}}_s\cdot\mathbf{R}}\right]$$

$$=\frac{E_0}{4\pi\varepsilon}e^{-i\omega_i t}\nabla_R\times\nabla_R\times\left[e^{i\mathbf{k}s\cdot\mathbf{R}}\int\frac{d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}e^{iqr}\left(\delta\varepsilon(\mathbf{r},t):\mathbf{n_i}\right)\right]$$

ここで、指数関数の肩で$(\omega_i-\omega)$となった場合に、ωは小さいと考えてω積分の外にω_sとして取り出した。さらに、遠方近似をもう一度おこなう。すなわち、

$$\left[\begin{array}{lll}|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^{-1} & \rightarrow & \mathbf{R}^{-1}\\ \nabla_R\times & \rightarrow & i\mathbf{k_s}\times\end{array}\right.$$

と置き換える。

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R},t)=\frac{-E_0}{4\pi\varepsilon}e^{i(\mathbf{k}s?\mathbf{R}-?_i\ t)}\mathbf{k}_s\times\mathbf{k}_s\times\underline{\int d^3\mathbf{r}e^{iqr}\left(\delta\varepsilon(\mathbf{r},t):\mathbf{n_i}\right)}$$

ここで、$\mathbf{n}_s$を$\mathbf{E}_s$方向の単位ベクトルとする。すなわち、

$$\left[\begin{array}{l}\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{k}_s=0\\ \mathbf{E}_s=E_0^s\mathbf{n}_s\end{array}\right.$$

とすると、

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R},t)=\frac{-\mathbf{E}_0}{4\pi\varepsilon R}e^{i(\mathbf{k}s\cdot\mathbf{R}-\omega_i t)}\mathbf{n}_s\cdot\left(\mathbf{k}_s\times\mathbf{k}_s\times\left(\delta\varepsilon(\mathbf{r},t):\mathbf{n_i}\right)\right)$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\boxed{E_s^0(\mathbf{R},t)=\frac{E_0\omega_s^2}{4\pi\varepsilon R}e^{i(\mathbf{k}s\cdot\mathbf{R}-\omega_i t)}\delta\varepsilon_{si}(q,t)}$$

ここで

$$\delta\varepsilon_{si}(q,t)=\mathbf{n}_s\cdot\left(\delta\varepsilon(\mathbf{r},t):\mathbf{n_i}\right)$$

は揺らぎテンソルである。①、②から、いくつかのことがわかる。

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R},t)\propto\frac{e^{i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{R}}}{R}\quad\rightarrow\quad\text{球面波}$$

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R},t)\propto\mathbf{E}_0\delta\varepsilon_{si}(q,t)\quad\rightarrow\quad\left(\begin{array}{l}\bullet\ \text{揺らぎに比例}\\ \bullet\ \text{入射振幅に比例}\\ \bullet\ \left\langle\mathbf{E}_0^s(\mathbf{R},t)\right\rangle=0\end{array}\right.$$

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R},t)\propto e^{-i\omega_i t}\quad\rightarrow\quad\text{入射光の振動数で振動}$$

<u>異方性がある場合への拡張</u>

ここまで$\delta\varepsilon$はスカラーとして扱ってきたが実際上、物質に異方性があるとテンソル量にな

り、これを取り入れる。

$$\sum_j \underset{\left[\substack{3\times3\\ 行列}\right]}{\underline{\delta\varepsilon_{ij}}}\, E_j(\mathbf{r},t) \quad\rightarrow\quad (\delta\varepsilon(\mathbf{r},t):\mathbf{n_i})$$ とかく。

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t') = E_0\mathbf{n}_i e^{i(k_i\cdot\,\mathbf{r}_i-\omega_i t')}$$

<u>パワースペクトル</u>

$$I_s(q,\omega_s) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{-i\omega_s t}dt$$

$$C(t) = \left\langle \mathbf{E}_s^*(t-t_0)\mathbf{E}(t_0)\right\rangle_t - \left|\left\langle \mathbf{E}_s\right\rangle^2\right|$$

$$= \underline{\left\langle \mathbf{E}_s^*(t)\mathbf{E}(0)\right\rangle} \quad 電場時間相関関数$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \underline{\underline{\mathbf{E}_s^*(t+s)\mathbf{E}(s)}}ds \qquad \rightarrow e^{i\omega_i(t+s)}e^{i\omega_i s}\rightarrow e^{i\omega_i t}$$

s の部分が消えるので積分の外に出る。

$$\omega \equiv \omega_i - \omega_s$$ （入射光と散乱光の振動数差）

とすると

$$C(t) = |\mathbf{E}_0|^2\left(\frac{k_s^2}{4\pi\varepsilon R}\right)^2\left\langle \delta\varepsilon^*{}_{si}(q,t)\delta\varepsilon_{si}(q,0)\right\rangle e^{i\omega_i t}$$

$$I_s(q,\omega_s) = \frac{I_0}{8\pi^2R^2}\left(\frac{\omega_i^4}{c^5}\right)\underline{\int_{-\infty}^{\infty}dt\left\langle \delta\varepsilon^*{}_{si}(q,t)\delta\varepsilon_{si}(q,0)\right\rangle e^{i\omega_i t}}$$

（=S(q,ω)とおく）

ただし、$\delta\varepsilon_{si}(q,t) = \underline{\mathbf{n}_s\cdot(\delta\varepsilon(q,t)):\mathbf{n}_i}$

S(q,ω)は誘電率ゆらぎの時間相関関数のフーリエ変換であるので、散乱光のパワースペクトルは、「誘電率ゆらぎの時間相関関数のフーリエ変換」である。

<u>注意：</u>今みている“ゆらぎ”は$\omega \equiv \omega_i - \omega_s$の時間スケールである

<u>12.4.　　等方的媒質による散乱</u>

誘電率ゆらぎ S(q,ω)が等方的媒質でおきている場合を考える。誘電率ゆらぎの原因として、

熱力学○のゆらぎを考える。

$$\delta\varepsilon_{si}(q,t) = \mathbf{n}_s \cdot (\delta\varepsilon(q,t) : \mathbf{n}_i)$$

$$= (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)\delta\varepsilon(q,t)$$

$$\delta\varepsilon(q,t) = \underbrace{\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \delta\rho}_{\text{密度ゆらぎ}} + \underbrace{\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \delta T}_{\text{温度ゆらぎ}}$$

以下、第 2 項の温度ゆらぎは小さいとする。

$$\mathrm{S}(q,\omega) = (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{\mathrm{T}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\langle \delta\rho^*(q,t)\delta\rho(q,0)\right\rangle e^{i\omega t}$$

空間フーリエ変換

$$\left\langle \delta\rho^*(q,t)\delta\rho(q,0)\right\rangle = V\int d^3r\, e^{-iqr} \underbrace{\boxed{\left\langle \delta\rho^*(r,t)\delta\rho(r,0)\right\rangle}}_{\text{密度ゆらぎの時間空間相関関数}}$$

$$\mathrm{S}(q,\omega) = (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{\mathrm{T}}^2 V \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r\, e^{i(\omega t - qr)} \left\langle \delta\rho^*(q,t)\delta\rho(q,0)\right\rangle}_{\text{動的構造因子 } \mathrm{S}(q,\omega)}$$

$$= (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{\mathrm{T}}^2 V\,\mathrm{S}(q,\omega)$$

構造因子

$$\mathrm{S}(q) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathrm{S}(q,\omega)$$

<u>一般的に、構造因子がゆらぎの大きさをあらわす</u>

$$\int \underline{\varphi_w} dw = \left\langle \overline{x^2} \right\rangle \qquad \varphi_w \text{ ; 時間相関関数}$$

以上をまとめて，パワースペクトルが得られる。

$$\boxed{I_s(q,\omega_s) = \frac{I_0 V}{8\pi^2 R^2}\left(\frac{\omega_i^5}{c^5}\right)(\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{\mathrm{T}}^2 \mathrm{S}(q,\omega)}$$

○　光散乱実験から相関関数のフーリエ変換を導くこともできる。