

## 9. 幾何光学

幾何光学は $\varepsilon$  が波長に比べてゆっくりと空間的に変化する場合に適用可能である。この時、光のエネルギーの伝播は「光線 (ray)」として記述される。

### 9.1 アイコナル方程式

この節では、一様な媒質ではなく、誘電関数 (誘電率)  $\varepsilon$  が空間依存性を持つ場合を考える。すなわち、 $\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})$ 。この時、屈折率  $n$ 、位相速度  $c$  も以下のように空間依存性を持つ。 $\mu$  の空間依存性は考えず、真空中の値と同じにしておく。すなわち  $\mu = \mu_0$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \\ n(\mathbf{r}) &= \sqrt{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \\ c(\mathbf{r}) &= \frac{c_0}{n(\mathbf{r})}\end{aligned}\tag{9-1}$$

(9-1) を Maxwell 方程式に代入する。いま、波長  $\lambda$ 、角振動数  $\omega$  の光を考える。 $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$  の変化が電場の空間変化 (波長  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ ) よりゆっくりとしている場合、すなわち

$$\lambda \frac{|\nabla \varepsilon|}{\varepsilon} \ll 1\tag{9-2}$$

の場合、波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0\tag{9-3}$$

が得られる。以後、簡単のため、スカラー場  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  を考える。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0\tag{9-4}$$

単色光 (角振動数  $\omega$ ) を扱っているので、以下の形の解を考える。

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{i\{\phi(\mathbf{r}) - \omega t\}}\tag{9-5}$$

ここで  $a(\mathbf{r})$  を電場振幅、 $\phi(\mathbf{r})$  を アイコナル<sup>1</sup> と呼ぶ。共に実関数であるとする。

(9-5) を (9-4) に代入すると、

$$\left(\nabla^2 a(\mathbf{r}) - a(\mathbf{r})(\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} a(\mathbf{r}) + i(2\nabla a(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}))\right) = 0\tag{9-6}$$

が得られる。 $a(\mathbf{r})$ 、 $\phi(\mathbf{r})$  は実関数であるから、実部、虚部はそれぞれ 0 である。

故に、

<sup>1</sup> ギリシャ語のアイコン ( $\varepsilon\iota\kappa\tilde{\omega}\nu$ ) = 像に由来。最近のコンピューター (Mac を代表とするウィンドウシステム) にもたくさん入っているアイコンと語源は同じ。

$$\nabla^2 a(\mathbf{r}) - a(\mathbf{r}) |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} a(\mathbf{r}) = 0 \quad (9-7)$$

$$2\nabla a(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0$$

が得られる。ここまでは (9-2) の近似の元で厳密である。次に、媒質 ( $\epsilon(\mathbf{r})$ ) の変化が電場の空間変化よりゆっくりとしている場合を考えていることから、 $a(\mathbf{r})$ 、 $\phi(\mathbf{r})$  に対して以下の近似をする。

### 幾何光学近似

電場振幅  $a(\mathbf{r})$ 、アイコナル  $\phi(\mathbf{r})$  も電磁波の空間変化に比べてゆっくりと変化する。

この場合、 $\mathbf{r}_0$  の近傍で  $\phi(\mathbf{r})$  をテーラー展開すると、

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + \nabla \phi(\mathbf{r}_0) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dots \quad (9-8)$$



第2項は  $\mathbf{k} = \nabla \phi(\mathbf{r}_0)$  とおくと、波数としての意味があることがわかる ((9-8) をもとの式に代入してみよ)。

この類推から電磁波の波長  $\lambda$  は、

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} = \frac{2\pi}{|\nabla \phi(\mathbf{r})|} \quad (9-9)$$

で定義される。**幾何光学近似**は、

$$\lambda^2 \frac{\nabla^2 a(\mathbf{r})}{a(\mathbf{r})} \ll 1 \quad (9-10)$$

として (9-7) 式の第一式の第一項を無視する近似である。

### アイコナル方程式 (eikonal equation)

幾何光学近似のもとで、(9-7) の第一式は、

$$|\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 = \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} = k_0^2 n(\mathbf{r})^2 \quad (9-11)$$

と変形される。これを**アイコナル方程式**と呼ぶ。

アイコナル方程式が解け、 $\phi(\mathbf{r})$  がわかると、(9-7) 式の第二式

$$2\nabla a(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (9-12)$$

から、電場振幅  $a(\mathbf{r})$  を得ることができる。

以上から、誘電率が空間的に変化している場合でも、波長に比べてゆっくりと変化している場合には、問題が解けることがわかる。

「幾何光学」では、アイコナル方程式の解  $\phi(\mathbf{r})$  から作られるベクトル

$$\mathbf{k} = \nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (9-13)$$

の積分曲線が「光線」と一致する。

波面は  $\phi(\mathbf{r}) - \omega t = \text{const.}$  により決定される。波面にとった任意の変位  $\delta\mathbf{r}$  に対して、

$$\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r} = \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} = \delta\phi = 0$$

故に、 $\mathbf{k} = \nabla\phi(\mathbf{r})$  は波面に垂直。

光線の経路長を  $l$  とすると、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \mathbf{e}$$

は「光線」の接線ベクトルである。(9-11)、(9-13) より、

$$\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} \mathbf{e} = k_0 n(\mathbf{r}) \mathbf{e} \quad (9-14)$$

故に、

$$\frac{d\phi(\mathbf{r})}{dl} = \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} \quad (9-15)$$

この式からアイコナル  $\phi(\mathbf{r})$  は光線に沿った積分

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} dl = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0) \quad (9-16)$$

によりあたえられる。

○ ハミルトンの特性関数

$$\phi_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0) \quad (9-17)$$

これを用いるとアイコナル方程式は、

$$(\nabla\phi_H)^2 = \left(\frac{\omega}{c(\mathbf{r})}\right)^2, \quad (\nabla_0\phi_H)^2 = \left(\frac{\omega}{c(\mathbf{r}_0)}\right)^2$$

とかける。力学における Hamilton-Jacobi 方程式はこのアナロジーから導かれた。<sup>2</sup>

<sup>2</sup> **Hamilton-Jacobi (HJ) 方程式** のひとつの表現は以下のように与えられる。

ハミルトンの主関数  $S(q, p, t) = \phi_H(q, p) - Et$  から、導かれるハミルトンの特性関数  $\phi_H(q, p)$  をもちいると、運動方程式は

$$(\nabla\phi_H)^2 = 2m(E - V) = p^2$$

となる。

歴史的には、ドブロイ波 ( $\lambda = h/p$ ) の長波長近似 (幾何光学近似) として HJ 方程式を考え、近似の前の波動方程式として、Schrodinger 方程式が導かれた。(波動力学)

このように、「幾何光学」の思考: Maxwell 方程式 → アイコナル方程式 (「光線」の方程式) の逆をたどって、HJ 方程式 (質点の力学) → Schrodinger 方程式 (波動方程式) が導かれたのは大変興味深い。

## 9.2 フェルマーの原理とホイヘンスの原理

アイコナール方程式から「フェルマーの原理」を導出する。

アイコナール方程式 (9-11)

$$(\nabla\phi)^2 = k_0^2 (n(\mathbf{r}))^2 \quad (9-18)$$

において空間の尺度を、

$$(d\xi, d\eta, d\zeta) = k_0 n(\mathbf{r})(dx, dy, dz) \quad (9-19)$$

と変更する。この時、空間の計量は、

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = k_0^2 n(\mathbf{r})^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

となる。この空間でアイコナール方程式は、

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)^2 = 1 \quad (9-20)$$

と書き直すことができる。この方程式のひとつの解

$$\phi = a\xi + b\eta + c\zeta \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1) \quad (9-21)$$

を考える。この空間では、 $\phi = \text{const.}$  の面は平行平面なので、それと直交する曲線は直線となる。したがって、この解に対応する「光線」は直線となる。それ故、2点 P, Q を通る光線は積分

$$\int_P^Q d\sigma = k_0 \int_P^Q n(r) dl = \omega \int_P^Q \frac{dl}{c(\mathbf{r})} \quad (9-22)$$

が極値をとるという条件になる。ここに  $dl$  はカーテシアン座標系での線要素である。

(9-22) 式の  $\int_P^Q \frac{dl}{c(\mathbf{r})}$  は PQ 間を光が進む時間に相当する。したがって、(9-22)

式が極値をとるという条件は、以下のように記述可能である。

### フェルマーの原理

「2点間を通る光は所要時間が最短（または、最長）となる経路を通る。」

#### ○ フェルマーの原理の応用例

反射の法則

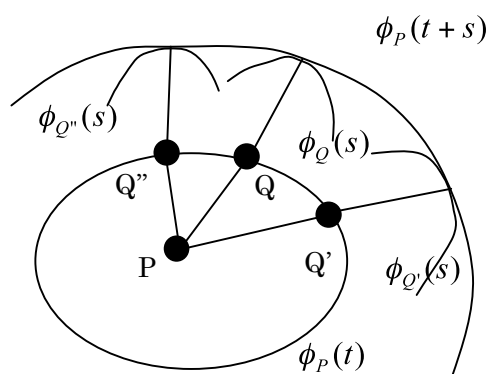
スネルの法則

逃げ水

以下、フェルマーの原理からホイヘンスの原理を導出する。

○ ホイヘンスの原理

「波源 P からでた波の時間  $t$  後の波面を  $\phi_P(t)$ 、またこの波面の任意の点 Q からでた波の時間  $s$  後の波面をとすると、波源 P からの波の時間  $t+s$  後の波面  $\phi_P(t+s)$  はすべての  $\{\phi_Q(s) \mid Q \in \phi_P(t)\}$  の包絡線である。」



ホイヘンスの原理

<導出>

授業でやります。

<ヒント>

$\phi_Q(s)$  は波面  $\phi_P(t+s)$  と接していることを示せばよい。もし交わっていた場合、どんな矛盾が存在するか？

9.3 レンズ系

カメラやメガネなど身近なものの中で活躍しているレンズを幾何光学の枠組みで記述する。また、レンズの公式やレンズを組み合わせていったとき、どこに像が生じるかを議論する。応用上も球面が作りやすいので、この節の議論は球面に限る。

(a) 近軸近似

図 9-1 の様に、屈折率  $n_1$  の物質と屈折率  $n_2$  の物質が半径  $r$  の球面で接している場合を考える。球の中心 O をとおる直線を光軸と呼ぶ。球面左の光軸上の一点 P から、

球面右の光軸上の1点 Q に光線が到達する場合を考える。

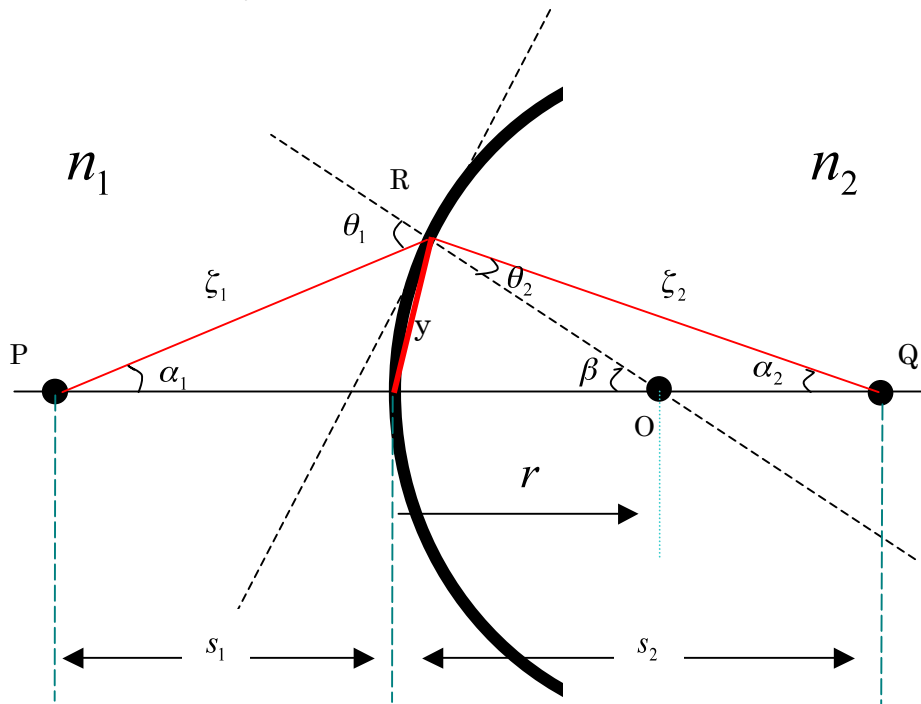


図 4 - 1 近軸近似

屈折率は  $n_2 > n_1$  を満たしているとする。また、 $s_1, s_2, r > 0$  とする。

この時、サイン定理から

$$\frac{s_1 + r}{\sin(\pi - \theta_1)} = \frac{\xi_1}{\sin \beta} \quad (9-23)$$

$$\frac{s_2 - r}{\sin \theta_2} = \frac{\xi_2}{\sin(\pi - \beta)}$$

スネルの法則

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (9-24)$$

より、

$$\frac{s_1 + r}{\xi_1} = \frac{n_2}{n_1} \frac{s_2 - r}{\xi_2} \quad (9-25)$$

が得られる。ここで光線が光軸からあまり離れないという近似（近軸近似）を

すると、 $s_1 \cong \xi_1, s_2 \cong \xi_2$  となるから、(9-25) 式は

$$1 + \frac{r}{s_1} = \frac{n_1}{n_2} \left(1 - \frac{r}{s_2}\right) \quad (9-26)$$

変形して、

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (9-27)$$

が得られる。この式はもはや、 $\alpha_1$  や  $\alpha_2$  に依存していないことから、1点 P から発し

た近軸な光線はすべて  $Q$  を通ることがわかる。  $P$  の像が  $Q$  にできることがわかる。ここでいくつか例題を解こう。

**例 1.**  $n_1 = 1, n_2 = 1.5, s_1 = 4, r = 1$  の場合

この屈折率の組み合わせは、空気中のガラスの場合に相当している。(9-27)を計算すると、 $s_2 = 6$  が得られる。 $Q$  に**実像**ができる。

**例 2.**  $n_1 = 1, n_2 = 1.5, s_1 = 0.5, r = 1$  の場合

例 1 とは異なり、 $s_2 = -1$  になってしまう。これは球面境界の右側に像ができずに、発散光となることを意味している。この場合、境界の左側の  $Q$  に**虚像**ができ、そこから、あたかも境界がないかのごとく光が伝わるという記述が可能である。(詳しくは授業で)

例 2 のような場合も系統的に扱うために、以降は、図 4-2 のように座標系を定めて記述する。ここでは、 $P$  の  $x$  座標が負になっていることに注意。

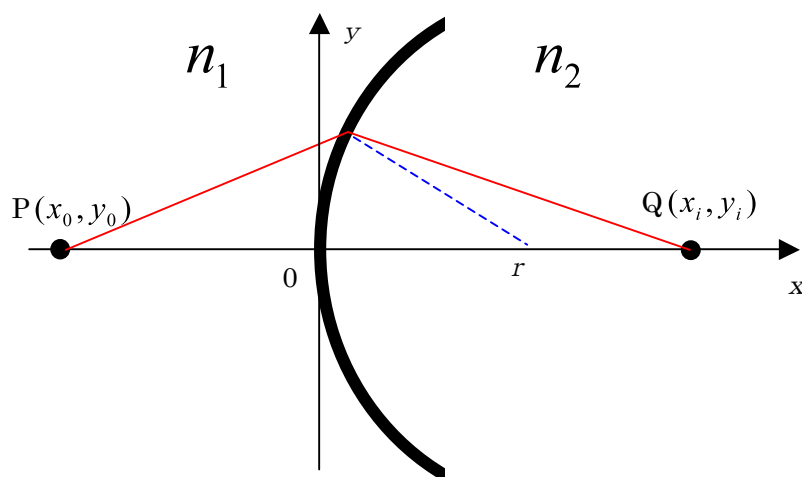


図 9-2 レンズ系を扱うための座標系

この座標系では、

$$-\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (9-28)$$

この表記では、 $r$  が負の場合も扱うことが可能である。これは、図 4-2 において、 $n_1$  の側に球面がある場合に相当する (球の中心が負の側にある)。

**例 3.**  $n_1 = 1, n_2 = 1.5, x_1 = -2, r = -1$  の場合

$x_i = -1.5$  となる。したがって、虚像となり発散光として振舞うことがわかる。

**例 4.** 平行光が入射する場合

例 1 の条件では、 $s_1 = \infty$  とおくと、 $s_2 = 3$  となる。

例 3 の条件では、 $x_0 = -\infty$  とおくと、 $x_i = -3$  となる。

それぞれ、半径  $r$  の3倍 ( $\frac{n_2}{n_2 - n_1}$ ) の位置に実像または虚像ができることになる。

### (b) 薄いレンズの公式

正の曲率の球面と負の曲率の球面が組合わさった場合の結象について考える。

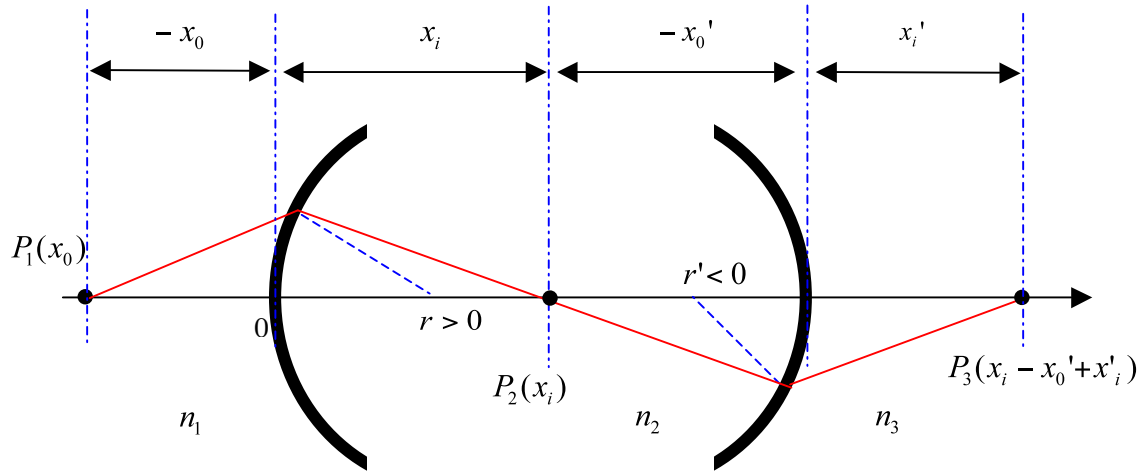


図 9-3 薄いレンズの公式

(9-28) 式より、

$$-\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (9-29)$$

$$-\frac{n_2}{x_0'} + \frac{n_3}{x_i'} = \frac{n_3 - n_2}{r'}$$

レンズの厚さ  $d$  を以下のように定義する。

$$d = x_i - x_0' \quad (9-30)$$

(9-30) を (9-29) の第一式に代入すると、

$$-\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_2}{x_0' + d} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (9-31)$$

ここで、「薄いレンズ」の近似をする。 $d$  は他の量に比べて非常に小さいものとする。

$$\text{すなわち、} \quad d \ll |x_0|, |x_0'|, |r|, |r'| \quad (9-32)$$

この場合、(9-31) 式は、

$$-\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_2}{x_0'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (9-33)$$

となるから、これを持ちいて、(9-29) の第二式に代入して  $x_0'$  を消去すると以下の式が得られる。



$$-\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_3}{x_i'} = \frac{n_3 - n_2}{r'} + \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (9-34)$$

レンズの外側は空気であるとして、 $n_1 = n_3 = 1$ とし、 $n_2 = n$ とおくと、

$$-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_i'} = \frac{1-n}{r'} + \frac{n-1}{r} \quad (9-35)$$

が得られる。右辺を焦点距離  $f$  の逆数であると定義する。

$$\frac{1}{f} \equiv \frac{1-n}{r'} + \frac{n-1}{r} \quad (9-36)$$

$f$  をもちいて (9-35) を書き直すと **薄いレンズの公式** が得られる。

$$-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_i'} = \frac{1}{f} \quad (9-37)$$

となり、 $-x_0 \rightarrow a$ ,  $x_i' \rightarrow b$  と置き換えると「レンズの公式」としてよく知られた形になる。