４　物質中のＭａｘｗｅｌｌ方程式ＩＩ

4.1　絶縁体中での平面電磁波

$\rho = 0, \quad \mathbf{i} = 0$　誘電体の中を考えるので$\mathbf{P}$があらわに現れる。

ただし、磁性はないものとする。すなわち$\mathbf{M} = 0$。

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\right) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\right)$$

ファラデーの法則の左から$\nabla\times$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \mathbf{B}\right)$$

$$\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{E}\right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{P}\right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P} - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{P}\right)$$

ここで$\mathbf{P}$は$\mathbf{E}$に対して線型に応答し、その応答は空間的に変化しないとしよう（一様)。

すなわち

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \tag{4.1}$$

ただし、χは空間座標によらない。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0 x \mathbf{E}\right) - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\left(\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(x \mathbf{E}\right)\right)$$

ここで Gauss の法則は空間の一様性から

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}\right) = 0$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(1 + \chi\right)\mathbf{E} = 0 \qquad x \text{は定数}$$

$$\varepsilon_0 \left(1 + \chi\right)\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

故にこの項は0

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\left(1 + \chi\right)}\mathbf{E} = 0$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi \qquad \text{：非誘電率}$$

実際はχには時間依存性がある。このままではダメ。

◎ 応答関数による$\mathbf{P}(t)$の記術

$\mathbf{P}(t)$は外場によって生じた応答である。時間依存性があるχを$f(t)$とする。

$$\mathbf{P}(t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{t} f(t-t')\mathbf{E}(t')dt' \qquad (4.2)$$

$f(t)$は応答関数と呼ばれる実関数である。

因果律から、むかしの電場に対する応答のたたきこみ積分になるべき。

$t \le 0 \qquad f(t)=0$

$t \ge 0 \qquad f(t)$ とすると

$$\mathbf{P}(t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')\mathbf{E}(t')dt' \qquad (4.3)$$

フーリエ成分で表現

$$\mathbf{E}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{E}}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (4.4)$$

逆変換 $$\tilde{\mathbf{E}}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(t)e^{i\omega t}dt \qquad (4.5)$$

同様に $$\mathbf{P}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\tilde{\mathbf{p}}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (4.6)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\tilde{\chi}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (4.7)$$

(3.3)の両辺に$e^{i\omega t}$をかけてtで積分。

$$\mathbf{P}(\omega)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')\mathbf{E}(t')e^{i\omega_0 t}at'dt$$

(3.5),(3.7)を代入する。

$$=\frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^2}\iiiint\tilde{\chi}(\omega)e^{-i\omega(t-t')}\tilde{E}(\omega')e^{-i\omega' t'}e^{i\omega_0 t}dtdt'd\omega d\omega'$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^2}\iiiint\tilde{\chi}(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\omega')e^{-i(\omega'-\omega)t'}e^{-i(\omega-\omega_0)t}dtdt'd\omega d\omega'$$

$$\boxed{\delta(y)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-iyx}dx}$$

t,t' の積分は$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$を考慮して、

$$\delta(\omega'-\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)$$

ω,ω'積分を実行して

$$\boxed{\mathbf{P}(\omega_0)=\varepsilon_0\tilde{\chi}(\omega_0)\tilde{\mathbf{E}}(\omega_0) \qquad (4.8)}$$

←たたきこみ積分のフーリエ変換は積になる！

◎ 絶縁体の中での波動方程式

以上の考察から、

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(1+\chi)\mathbf{E}=0$$

は本来は、

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathbf{E}+\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t')\mathbf{E}(t')dt'\right)=0$$

と書くべきで、フーリエ変換をすることで

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}(\omega)-\frac{1}{c^2}(-i\omega)^2\left\{\tilde{\mathbf{E}}(\omega)+\tilde{\chi}(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\omega)\right\}=0$$

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}(\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}(1+\tilde{\chi}(\omega))\tilde{\mathbf{E}}(\omega)=0$$

ここで、$\tilde{\chi}(\omega)$は応答関数$f(t)$の逆フーリエ変換であり、複素感受率とよぶ。

複素感受率は　線型の関係式　$\mathbf{P}(\omega)=\varepsilon_0\tilde{\chi}(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$　の応答係数となっている。

複素感受率は一般的には複素関数である。複素関数の性質から、一般的に$\tilde{\chi}(\omega)$が満たすべき種々の性質が導かれる。これについては問題および後の章で述べる。

複素比誘電率　$1+\tilde{\chi}(\omega)=\varepsilon_r(\omega)$　　複素誘電関数（誘電率）　$\varepsilon_0(1+\tilde{\chi}(\omega))=\varepsilon(\omega)$

が定義される。電磁場のフーリエ成分は複素誘電関数を用いて

$$D(\omega)=\varepsilon(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$$

という関係式が得られる。誘電関数の満たすべき関係式も同様に導かれる。

また、　$1+\tilde{\chi}(\omega)=\tilde{n}^2(\omega)$　複素屈折率の二乗　を定義すると、

$$\boxed{\nabla^2 \widetilde{\mathbf{E}}(\omega) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \widetilde{\mathbf{E}}(\omega) = 0 \qquad (4.9)}$$

ヘルムホルツの波動方程式

$\tilde{n}$ が実数の場合、$\widetilde{\mathbf{E}}(\omega)$ として x 方向に進行する平面波（３次元）$e^{i\mathbf{k}\cdot x - i\omega t}$ を考えると、

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \qquad (3.10)$$

という分散式が得られる。

物質中の位相速度は　$v_p = \dfrac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \dfrac{c}{n}$ であたえられる。

4.2　　巨視的 Maxwell 方程式における物質場

$\mathbf{P}$ の線形応答を考える。

$$\begin{cases} .\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} f(t-t')\mathrm{E}(t)dt' \\ \mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega)\mathbf{E}(\omega) \end{cases}$$

ここで

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}$$

とまとめると、誘電関数 ε (ω)が以下のように定義される。

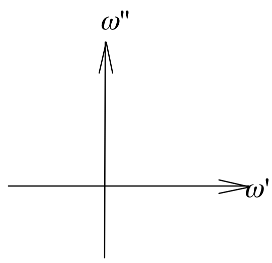
$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) = \varepsilon_0 \left(1 + \int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau\right) \qquad (\because \text{因果律より。 ただし}f\text{は実関数})$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{やってみよう} \\ \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \text{とおくと} \\ \varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega) \quad \varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega) \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega) \end{array}\right]$$

◎複素誘電関数 $\varepsilon(\omega)$ の実部と虚部の関係

解析接続して ω の複素平面で考える　$\omega = \omega' + i\omega''$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau\right)$$



ε は上半面のいたるところで一価関数かつ∞にならない。

（因果律より$\tau > 0$に制限されている）
したがって定義より、以前えられた関係式
$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$　は　$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega)$　に拡張される。

☆　特にωが純虚数のとき

$$\varepsilon(i\omega'') = \varepsilon^*(i\omega'') \cdot \cdot \cdot \otimes$$

つまり虚軸上で関数$\varepsilon(\omega)$は実数である。
すなわち$\omega = i\omega''$のとき Im ε =0　であることが分かる。

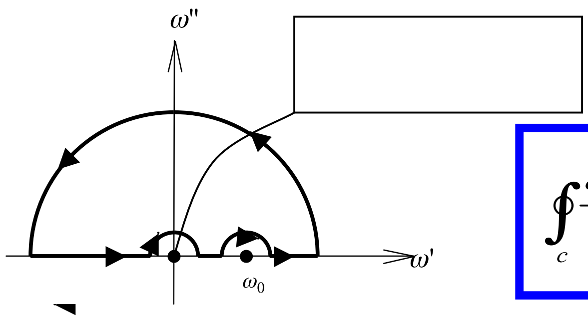
☆実軸上は原点を除いて　特異点なし（後にあるように、金属の ε は原点に極を持つ。）
⊗の性質は、$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ のとき D は実数であることを保障している。

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0{}^* e^{i\omega^* t} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \varepsilon(-\omega^*)\mathbf{E}_0{}^* e^{i\omega^* t} \end{cases}$$

右辺第 2 項目は、上の関係式より$\varepsilon^*(\omega)\mathbf{E}_0{}^* e^{i\omega^* t}$となるので第一項の複素共役となる。すなわち、D も実関数。

4.3.　　クラマース・クローニッヒの関係式

$\varepsilon(\omega)$が上半面で解析的かつ∞に発散しないことから、下記の周回積分はゼロになる。（コーシーの積分）



$$\boxed{\oint_c \frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} = 0}$$

まず、誘電体の場合を考える。無限半円の積分は 0 である。（因果律）

$$p\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega - i\omega[\varepsilon(\omega_0) - \varepsilon_0] = 0$$

第 1 項は実軸上の主値積分、第 2 項はω_0回りの迂回。

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$$ とし、実部と虚部に分けて書くと

$$\left[\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi} p\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega} dx \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} p\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0}{x-\omega} dx \end{aligned}\right. \quad (\text{クラマース・クローニッヒの関係式})$$

ただし、金属の場合は $\omega=0$ に特異点があり、

$$\varepsilon_{AC} = i\frac{\sigma}{\omega}$$

の項が存在するので

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} p\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0}{x-\omega} dx + \frac{\sigma}{\omega}$$

と修正される。

4.4.　　金属の場合

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} = \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \text{オームの法則より} \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}. \\ \left(\text{これは、}\dfrac{1}{\omega}\text{が電子の平均自由行程時間より長い場合に成立}\right) \end{array}\right]$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\omega) = \sigma\,\mathrm{E}(\omega) - i\omega\varepsilon(\omega)\mathrm{E}(\omega) = -i\omega\tilde{\varepsilon}(\omega)\mathrm{E}(\omega)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon(\omega) + i\frac{\sigma}{\omega}$$

∘十分低周波では、第**1**項は無視できる。

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = i\frac{\sigma}{\omega} (\rightarrow \text{虚部のみ。原点に特異点あり。})$$

☆ $\tilde{\varepsilon}(\omega) = i\dfrac{\sigma}{\omega}$ と書くことに意味はあるのか？低周波極限は下記の周波数で破綻する。

$$|\sigma| \sim |\omega\varepsilon| \qquad \omega\text{：通常の金属の場合 THz}$$

THz 領域では、単純なオームの法則は適用できず、誘電的な応答が現れる。

<u>注意</u>　たいていの場合、金属における電磁場は、金属物体が空間的に不均一なことで決定されている。そのような場合には、時間変化に着目した上のような展開は、そもそ

も意味がない。巨視的な ε の概念は使えなくなる。

∘振動数が大きな場合

ω→∞では P は E においつかない。高周波の極限では自由な電子の運動は、

$$m\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \qquad \therefore \mathbf{v} = \frac{ie\mathbf{E}}{m\omega}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad \text{より} \quad \mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2} \qquad \therefore \mathbf{P} = \sum e\mathbf{r} = -\frac{e^2}{m\omega^2}N\mathbf{E}$$

したがって

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}\right) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2}\right) \quad (\omega_p : \text{プラズマ振動数})$$

一般には、ダンピングを考えて、以下のドルーデの分散式がえられる。

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \omega \rangle\rangle \gamma \rightarrow \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \dfrac{{\omega_p}^2}{\omega^2}\right) \\ \omega \langle\langle \gamma \rightarrow \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left(1 + i\dfrac{\omega_p^2}{\omega\gamma}\right) \quad \cdots\cdots\left\{\dfrac{\omega_p^2}{\gamma} = \sigma \text{とおくと金属の式になる}\right\} \end{array}\right.$$

4.5 金属の表面インピーダンス

ω がそれほど大きくない場合 $|\varepsilon_r| \rangle\rangle 1$

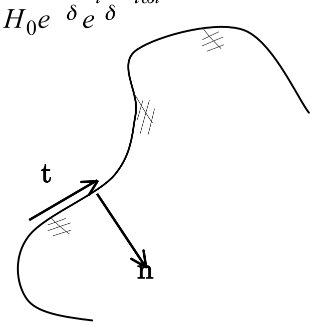
この条件のもとでは、金属中の波長

$$|\delta| \sim \frac{c}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0\omega\sigma}}$$

は真空中の波長と比べてずっと短い。空間の不均一性の問題も、δ が金属の曲率半径に比べて短ければ任意の電磁場に対する平面波の問題として扱える。

$$k = \frac{1+i}{\delta}$$

$$H = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\frac{z}{\delta} - i\omega t}$$



δ が小さい→電磁場の法線方向の導関数が

接線方向の導関数より大。

つまり、金属内部で表面近傍では平面波として扱える。

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_t \times \nu = Z_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}$$

$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \equiv \xi$: 表面インピーダンス　　Z_0: 真空のインピーダンス

∘THz 以下（低周波）では

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = i\frac{\sigma}{\omega} \qquad \xi = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1-i) = \xi' + i\xi''$$

表面を通過するエネルギーの時間平均は

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) = \frac{1}{2}\xi'|\mathbf{H}_t|^2\mathbf{n}$$

これは金属の中で散逸してしまうエネルギー。したがって

$\xi' > 0$　であるべきである。

これにより表面インピーダンスを求める際に、$\xi^2 = \frac{\mu}{\varepsilon}$ の平方根をとるときの、符号の決定法として、「ξ の実部が正になるように符号を決める」方法が得られる。

∘振動数が大きい場合の問題点

進入長 δ は自由電子の自由行程 l と同程度になる。このような場合は電場の時間的不均一性のために、ε を使った電場の巨視的な Maxwell 方程式による記述が不可能となる。この場合でも　$v/l \gg \omega$　より、σ は一定と考えてよい。　（Landau 電磁気学より）

しかし、

$$E_t = \xi[H_t, n]$$

の形の境界条件があることは重要。（δ が小さいときは常に平面波という近似は OK である）

ただし、ξ はもはや ε と結びつけることは出来ない。

∘さらに ω が大きくなるとどうなるか？

再び赤外域で電磁波の巨視的な記述が可能になる。これは、伝導電子による光吸収（ドルーデ）が起こるため、一般にこのような励起は非常に短い寿命(100fs 以下)となり、結果的にlがδより小さくなるから。