

## 2009年度版電磁気学4講義概要

京都大学物質—細胞統合システム拠点 教授 田中耕一郎

### <シラバス>

1. 真空中の Maxwell 方程式 I 10月6日  
内容: 真空中の Maxwell 方程式、ガウスの法則、アンペールの法則、ファラデーの法則、電荷の連続の式、波動方程式。Maxwell 方程式のフーリエ表示。平面波解。
2. 真空中の Maxwell 方程式 II 10月13日  
内容: スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル、ローレンツゲージ、電磁場のエネルギー密度とエネルギー流、場の運動量と角運動量。
3. 物質中の Maxwell 方程式 I 10月20日  
内容: 分極と磁化。物質中の Maxwell 方程式、ミクロな Maxwell 方程式と巨視的 Maxwell 方程式。
4. 物質中の Maxwell 方程式 II 10月27日  
内容: 物質中での平面電磁波、巨視的 Maxwell 方程式における物質場と応答関数、複素誘電関数とクラマース・クローニヒ関係式、金属と表面インピーダンス。
5. 物質中の Maxwell 方程式 III 11月10日  
内容: 光と物質との相互作用のモデル化、ローレンツ振動子モデル、デバイモデル、電磁波の分散。位相速度と群速度。
6. 物質中の電磁波 I 11月17日  
内容: 直線偏りと円偏り、ジョーンズベクトル、電磁場の境界条件。
7. 物質中の電磁波 II 11月24日  
内容: 反射と屈折。スネルの法則、反射係数、透過係数、エネルギー流の連続性。ブリュースター角、薄膜の透過率。
8. 物質中の電磁波 III 12月1日  
内容: 全反射。エバネッセント波とグースヘンシェンシフト、光のトンネル効果。空洞共振器。導波管。光ファイバー。
9. 幾何光学 12月8日  
内容: アイコナル近似。フェルマーの原理。スネルの法則。レンズ系。
10. 交流回路 12月22日  
内容: インピーダンス、キルヒホッフの法則、はしご回路とフィルター、等価回路と特性インピーダンス。
11. 光の散乱と回折 I 1月5日  
内容: 回折のスカラー理論、キルヒホッフの積分公式、バビネの定理、フラウンホファー回折とフレネル回折。方形開口、円形開口による回折。
12. 光の散乱と回折 II 1月12日  
内容: 振動する局所的な湧き出しからの電磁放射、電気双極子放射、誘電率のゆらぎによる散乱、青空、臨界タンパク光。
13. 予備 1月19日  
内容:
14. 試験 1月26日  
内容: この日に試験を予定します。

## 1. 真空中の Maxwell 方程式 I

## 1-1. 真空中の Maxwell 方程式

$$\text{MK S A} \quad \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$$

基本的な場  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

☆ (1.1)、(1.3)は Gauss の法則

例 1. 真空中の点電荷による電場

(1.1)を点電荷でかこむ体積で積分

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{e}{\epsilon_0}$$

積分形の Gauss の定理

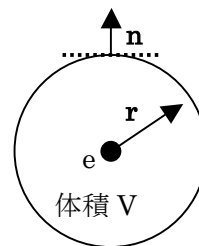
$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{e}{\epsilon_0}$$

ここで A は V をとりかこむ閉曲面。球面の場合は面に垂直なベクトルは  $\mathbf{E} // \mathbf{n}$  (対称性から) となる。このとき、

$$4\pi r^2 |\mathbf{E}| = \frac{e}{\epsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \quad (1.5)$$

or 
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \mathbf{e}_r$$



例 2. (1.3)はモノポール (単磁極) がないという証拠.

☆ 定常電流の場合のアンペールの法則

例 3. 電流 I が流れている長い電線の外部の磁場 (1.4)で  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  と置いたもの.

→アンペールの法則

対称性の点から  $\mathbf{B}$  は軸対称

$$(1.4) \text{より} \quad c^2 \int_A \nabla \times \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \int_A \frac{\mathbf{i}}{\epsilon_0} \cdot \boldsymbol{\eta} dA$$

$$c^2 \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\epsilon_0}$$

$$c^2 |\mathbf{B}| 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0}$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r}{r} \quad (1.7)$$

☆ 誘導法則. ファラデーの法則.

(1.2)より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

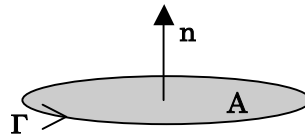
$$\int_A \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dA$$

□ (1.8)

↓ A を通る磁束

$$\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA$$

閉回路を貫く磁束が時間変化すると起電力が生じる。



1-2. Maxwell の予想と電荷の連続の式

元々の方程式のアンペールの式(1.4)には  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  の項がなかった。

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}}{\epsilon_0}$$

これにはおかしい点がある。

$$\nabla \cdot (c^2 \nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (\text{div} \cdot \text{rot は常に } 0)$$

これは任意の閉曲を通る全電流が 0 を意味する。これはおかしい。電荷はあちこち動く。閉曲面内部から電荷がなくなるような場合に、 $\nabla \cdot \mathbf{i} = 0$  はおかしい。もし電荷が保存するのならば、連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.9)$$

が成り立つべきである。これは“流れ”と“源”に間に成り立つ局所的保存則の1つである。

Maxwell はアンペールの法則を下のように右辺に  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  を付け加えるように提案した。

$$(1.4) \rightarrow c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

両辺の div をとる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{i} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \end{aligned}$$

(1.1) の Gauss の法則より

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.9)$$

☆ アンペールの法則に加わった新しい項の効果。

例 4.  $\rho = 0$ 、 $\mathbf{i} = 0$  の場合の Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1)'$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)'$$

源がなくても、 $\mathbf{E}$  の変化が  $\mathbf{B}$  の rot を生み出し、その変化がさらに  $\mathbf{E}$  の rot を生み出す。

誘電の法則からスタートする。

$$(1.2) \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

両辺の  $(\nabla \times)$  をとる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^4 \int \tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega \\
&= \int \tilde{E}_x(\mathbf{k}, \omega) (ik_x) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\
\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial y} \int \tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k}, \omega) (ik_y) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega \\
&= \int \tilde{E}_x(\mathbf{k}, \omega) (ik_y) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\
&= \int \{ k_y E_z(\mathbf{k}, \omega) - ik_z E_y \} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega \\
&= \int i(\mathbf{k} \times \mathbf{E})_x e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega
\end{aligned}$$

同様に  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \int i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega$

これ等を Maxwell 方程式に代入して

$$\begin{aligned}
\int i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega &= 0 \\
\int i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega &= -\int (-i\omega) \tilde{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega \\
\int i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega &= 0 \\
c^2 \int i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega &= \int (-i\omega) \tilde{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega
\end{aligned}$$

これ等は任意の  $\mathbf{r}, t$  で成立するから、 $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$  の係数は 0 にならなければならない。

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (1.12)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) - \omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (1.13)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (1.14)$$

$$c^2 \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) + \omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (1.15)$$

① (1.12), (1.14) から  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}}$  は波数  $\mathbf{k}$  に垂直 (横波)

② (1.13)の左から  $\mathbf{k} \times$

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) - \omega \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}} = 0$$

$$\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{E}} k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (\because (1.15))$$

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k} \cdot \omega) = 0$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k} \cdot \omega) \neq 0 \text{ であれば } \rightarrow \boxed{\omega = c|\mathbf{k}| \text{ 分散関係式}} \quad (1.16)$$

③ (1.13)から  $\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \tilde{\mathbf{E}} \quad (1.17)$

故に  $\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}$  は垂直

$\mathbf{k}$  と  $\tilde{\mathbf{E}}$  と  $\tilde{\mathbf{B}}$  は互いに垂直 (平面波解) この時、分散関係  $\omega = c|\mathbf{k}|$  を考慮すると、

$$\boxed{\therefore |\mathbf{B}| = \frac{\mathbf{k}}{\omega} |\mathbf{E}| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}|} \quad (1.18)$$