2017年度　物理学基礎論B

田中　耕一郎

2017.12.4

レポート課題（2017 12/19 締め切り）

（注）　忘れずに学籍番号と名前を書いて提出すること。12/19 の授業後もしくは、理学部５号館１１８号室（いない場合は１２０号室の秘書さん）に提出すること。

1　ローレンツ力のもとでの運動

定常電磁場、$\boldsymbol{E}//y$, $\boldsymbol{B}//z$ のもとでの荷電粒子の運動を考える。荷電粒子の質量を m、電荷を q とする。

(1) 運動方程式を書き下せ。

(2) $\boldsymbol{E}=0$ の場合を考える、$t=0$ において原点に粒子がおり、初速度が y 方向に v_0 の場合の運動を求めよ。運動の軌跡を図示せよ。

(3) $\boldsymbol{E}\neq 0$、$\boldsymbol{B}\neq 0$ の場合を考える、$t=0$ において原点に粒子がおり、初速度を 0 とする。この場合の運動を求めよ。また、運動の軌跡を図示し、電場の向きと運動の向きの関係について考察せよ。

（ヒント）　速度を $\boldsymbol{v}$ とした時、

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$$

と変数変換して。$\boldsymbol{v}'$ について解くと簡単である。

(解答例)

(1) 粒子の座標を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 速度を $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ とする。粒子の運動方程式は

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$ として、成分ごとに表すと

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qv_yB \\ m\dot{v}_y = q(E - v_xB) \\ m\dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

(2) $E = 0$ のとき、（1）より

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qv_yB \\ m\dot{v}_y = -qv_xB \\ m\dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

$t = 0$ で $z = 0, v_z = 0$ であるから、第 3 式より常に $z = 0$。よって xy 平面上の運動を考える。
(第一式) $+ i \times$ (第二式) より

$$m(\dot{v}_x + i\dot{v}) = -iqB(v_x + iv_y)$$

ここで $w = v_x + iv_y$ とすると

$$m\dot{w} = -iqBw$$

この微分方程式の解は、$t = 0$ における条件 $w = iv_0$ を考慮すると

$$w = iv_0 \exp{(-i\frac{qB}{m}t)} = iv_0 \cos{(\frac{qB}{m}t)} + v_0 \sin{(\frac{qB}{m}t)}$$

となる。実部、虚部を比較すると

$$\begin{cases} v_x = v_0 \sin{(\frac{qB}{m}t)} \\ v_y = v_0 \cos{(\frac{qB}{m}t)} \end{cases}$$

$t = 0$ において $x = 0, y = 0$ であることを考慮して積分すると

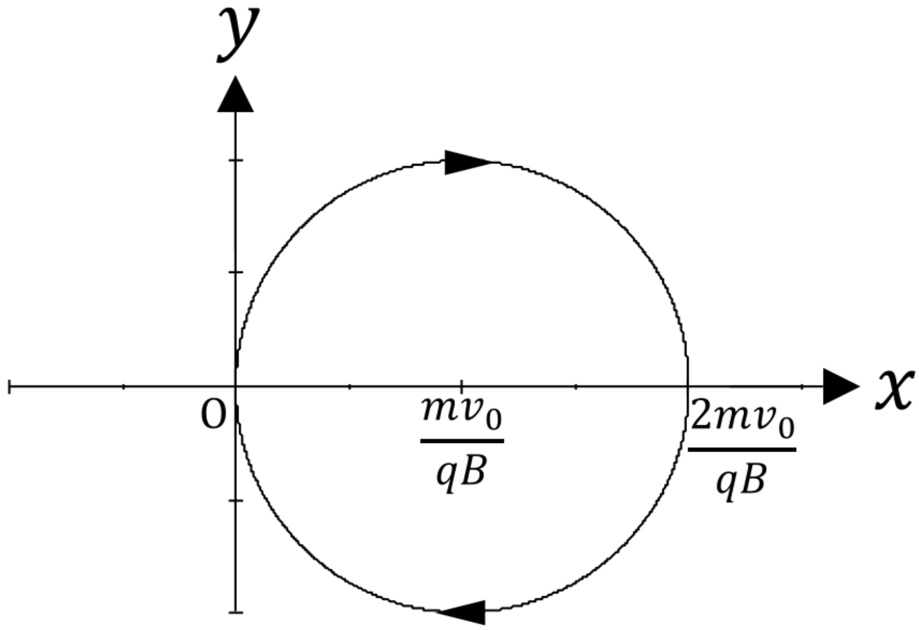
$$\begin{cases} x = \frac{mv_0}{qB}(1 - \cos{(\frac{qB}{m}t)} \\ y = \frac{mv_0}{qB} \sin{(\frac{qB}{m}t)} \end{cases}$$

この x, y は

$$(x-\frac{mv_0}{qB})^2+y^2=(\frac{mv_0}{qB})^2$$

を満たし、求める軌道は中心 $(\frac{mv_0}{qB}, 0)$、半径 $\frac{mv_0}{qB}$ の円になる。

以下に $q>0, B>0, v_0>0$ の際に軌跡を示す。



(3) 運動方程式 $m\dot{\boldsymbol{v}}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ において

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$$

とすると、E, B は時間依存しないことから運動方程式は

$$(\text{左辺})=m\dot{\boldsymbol{v}}=m\dot{\boldsymbol{v}}'$$

$$(\text{右辺})=q\{\boldsymbol{E}+\frac{(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}}{B^2}+\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}\}$$

ここで、任意のベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ についてベクトル三重積の公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

が成り立つので、

$$(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{E}B^2+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E})$$

さらに $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ は直交しているので $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=0$ であり

$$（右辺）= q(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}) = q\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}$$

よって運動方程式は

$$m\dot{\boldsymbol{v}}' = q\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}$$

これは (2) における運動方程式と同じである。$t=0$ で

$$\boldsymbol{v}' = -\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} = \begin{pmatrix} -\frac{E}{B} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、z 方向の初速度が 0 であるから (2) と同様に xy 平面上での運動を考えれば良い。$w' = v'_x + iv'_y$ とすると $t=0$ で $w' = -\frac{E}{B}$。よって、

$$w = -\frac{E}{B}\exp(-i\frac{qB}{m}t) = -\frac{E}{B}\cos(\frac{qB}{m}t) + i\frac{E}{B}\sin(\frac{qB}{m}t)$$

実部と虚部を比較して

$$\begin{cases} v'_x = -\frac{E}{B}\cos(\frac{qB}{m}t) \\ v'_y = \frac{E}{B}\sin(\frac{qB}{m}t) \end{cases}$$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{'} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/B^2$ より

$$\begin{cases} v_x = \frac{E}{B}(1-\cos(\frac{qB}{m}t)) \\ v_y = \frac{E}{B}\sin(\frac{qB}{m}t) \end{cases}$$

$t=0$ で $x=0, y=0$ であることを考慮して積分すると

$$\begin{cases} x = \frac{mE}{qB^2}(\frac{qB}{m}t - \sin(\frac{qB}{m}t)) \\ y = \frac{mE}{qB^2}(1-\cos(\frac{qB}{m}t) \end{cases}$$

したがって、求める軌道はサイクロイドであり、粒子は電場の向きに対し垂直方向に進む。以下に $q>0, E>0, B>0$ の際の軌跡を示す。