1　光パルスの Fourier 変換

角周波数 ω_0、1/e 半幅 τ の電場パルスを考える。

$$E(t) \;=\; E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)\exp(i\omega_0 t)$$

これを Fourier 変換すると

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)\exp(-i\omega t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2} - i(\omega-\omega_0)t\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau^2}\left(t+\frac{i(\omega-\omega_0)\tau^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{i(\omega-\omega_0)\tau^2}{2}\right)^2\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau^2}\left(t+\frac{i(\omega-\omega_0)\tau^2}{2}\right)^2 - \frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{4}\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau^2}\left(t+\frac{i(\omega-\omega_0)\tau^2}{2}\right)^2\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{4}\right)E_0\sqrt{\pi\tau^2} \\
&= \frac{E_0\tau}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

よって周波数（ω）領域では ω_0 を中心に $2/\tau$ の 1/e 半幅を持つことになる。

さて、光強度（パワー）は電場の 2 乗に比例するので、光強度は

$$\begin{aligned}
P(t) &= |E(t)|^2 \\
&= E_0^2 \exp\left(-\frac{2t^2}{\tau^2}\right)
\end{aligned}$$

より、光強度のパルス幅は、1/e 半幅 $\tau_{\mathrm{P}} = \tau/\sqrt{2}$ となる。一方、周波数領域では

$$\begin{aligned}
Q(t) &= |F(\omega)|^2 \\
&= \frac{E_0^2\tau^2}{2}\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

より、1/e 半幅 $\tau_{\mathrm{Q}} = \sqrt{2}/\tau$ の幅を持つ。

以上をまとめると、電場波形については 2 を時間幅 τ で割れば、角周波数幅が得られる。光強度波形については、1 を時間幅で割れば（つまり、単純に逆数をとれば）角周波数幅が得られる。

	時間幅	角周波数幅
電場	τ	$\frac{2}{\tau}$
光強度	$\tau_P = \frac{\tau}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\tau_P} = \frac{\sqrt{2}}{\tau}$

2　単位換算

スペクトルは角周波数よりも、光子エネルギー (eV) や波長 (nm) のほうが扱いやすいことから、これらに変換した式を導出しておく。

2.1　光子エネルギー

時間の単位を ps として、

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\mathrm{photon}} &= \hbar\Delta\omega \\
&= \frac{\hbar}{\Delta t} \\
&= \frac{6.58\cdot 10^{-16}}{\Delta t\cdot 10^{-12}} \\
&= \frac{6.58\cdot 10^{-4}}{\Delta t}\ \ (\mathrm{eV}) \\
&= \frac{0.658}{\Delta t}\ \ (\mathrm{meV})
\end{aligned}$$

2.2　波長

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\omega}{c} \\
\lambda &= \frac{2\pi}{k} \\
&= \frac{2\pi c}{\omega}
\end{aligned}$$

角周波数を波長になおすと

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda &= -\frac{2\pi c}{\omega^2}\Delta\omega \\
&= -\frac{\lambda^2}{2\pi c}\Delta\omega \\
&= -\lambda\frac{\Delta\omega}{\omega}
\end{aligned}$$

よって波長幅は光強度についての場合、長さの単位を μm、時間の単位を ps として、

$$\begin{aligned}
|\Delta\lambda| &= \left|\frac{\lambda^2}{2\pi c}\Delta\omega\right| \\
&= \left|\frac{\lambda^2}{2\pi c}\frac{1}{\Delta t}\right| \\
&= \left|\frac{\lambda^2}{2\pi\times 3\cdot 10^8\cdot 10^6\cdot 10^{-12}}\frac{1}{\Delta t}\right| \\
&= \left|\frac{\lambda^2}{600\pi}\frac{1}{\Delta t}\right|\ \ (\mu\mathrm{m})
\end{aligned}$$

となる。計算結果を nm で表せば、

$$
\begin{aligned}
|\Delta\lambda| &= 1000 \times \left| \frac{\lambda^2}{600\pi} \frac{1}{\Delta t} \right| \\
&= \left| \frac{5}{3\pi} \frac{\lambda^2}{\Delta t} \right| \\
&= 0.53 \cdot \frac{\lambda^2}{\Delta t} \ \ \text{(nm)}
\end{aligned}
$$

2.3 まとめ

波長 λ (μm)、1/e 半幅 Δt (ps) の光パルスのスペクトルは、1/e 半幅

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{\text{photon}} &= \frac{0.658}{\Delta t} \ \ \text{(meV)} \\
\Delta\lambda &= 0.53 \cdot \frac{\lambda^2}{\Delta t} \ \ \text{(nm)}
\end{aligned}
$$

※光強度で測った場合