黒板問題25の質問の回答

平成30年12月3日

$$w = A\cos^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)$$

の虚部 $v = \mathrm{Im}(w)$ によってポテンシャルが与えられる場合を考える。$w = u + iv, z = x + iy = r\mathrm{e}^{i\theta}$ とする。

$$\begin{aligned}\frac{z}{a} &= \cos\left(\frac{w}{A}\right)\\ &= \cos\left(\frac{u}{A}\right)\cosh\left(\frac{v}{A}\right) - i\sin\left(\frac{u}{A}\right)\sinh\left(\frac{v}{A}\right)\end{aligned}$$

より、

$$\frac{x}{a} = \frac{r}{a}\cos\theta = \cos\left(\frac{u}{A}\right)\cosh\left(\frac{v}{A}\right) \tag{1}$$

$$\frac{y}{a} = \frac{r}{a}\sin\theta = -\sin\left(\frac{u}{A}\right)\sinh\left(\frac{v}{A}\right) \tag{2}$$

である。

金属に与えられている電荷を求めるには、$r \longrightarrow \infty$ の極限を考える。$\left|\cos\left(\frac{u}{A}\right)\right| \leq 1, \left|\sin\left(\frac{u}{A}\right)\right| \leq 1$ より

$$\begin{aligned}\cosh\left(\frac{v}{A}\right) &\longrightarrow \infty\\ \sinh\left(\frac{v}{A}\right) &\longrightarrow \infty\end{aligned}$$

とならなければならないので、

$$v \longrightarrow \infty$$

である。この極限で

$$\cosh\left(\frac{v}{A}\right) \cong \sinh\left(\frac{v}{A}\right) \cong \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{v}{A}} \tag{3}$$

と近似でき、また式 (2) を式 (1) で辺々を割って

$$\tan\theta \cong -\tan\left(\frac{u}{A}\right) = \tan\left(-\frac{u}{A}\right)$$

より

$$\theta \cong -\frac{u}{A} \tag{4}$$

となる。

以上の式 (1)〜(4) を用いると、$r \longrightarrow \infty$ の極限で、

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{a} &\cong \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{v}{A}} \\
\frac{v}{A} &\cong \ln\left(\frac{2r}{a}\right) = \ln(r) + \mathrm{const.} \\
v &\cong A\ln(r) + \mathrm{const.}
\end{aligned}
$$

これは、線密度 $2\pi\epsilon_0 A$ の電荷をもった細線が作るポテンシャルと等しい。よって金属に与えられた電荷は線密度 $2\pi\epsilon_0 A$ であり、また線密度 λ となるようにするには $A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$ と置けばよい。■