

## 4 幾何光学

幾何光学は  $\epsilon$  が波長に比べてゆっくりと空間変化する場合に適用可能である。この時、光のエネルギー伝搬は「光線」として記述される。

### 4.1 アイコナル方程式

この節では、一様な媒質ではなく、誘電関数（誘電率） $\epsilon$  が空間依存性を持つ場合を考える。すなわち、 $\epsilon(\omega, \mathbf{r})$ 。この時、屈折率  $n$ 、位相速度  $c$  も以下のように空間依存性を持つ。

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

$$n(\mathbf{r}) = \sqrt{\epsilon_r(\mathbf{r})} \quad (4.2)$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad (4.3)$$

ただし、透磁率  $\mu$  は空間的に一様で、真空の透磁率と等しいとしている ( $\mu = \mu_0$ )

誘電関数（誘電率） $\epsilon$  が上の様に空間依存性を持つ場合、Maxwell 方程式  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  と  $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$  から  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  を消去したものは

$$\nabla \left( \frac{\nabla \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}}{\epsilon(\mathbf{r})} \right) + \Delta \mathbf{E} - \epsilon(\mathbf{r}) \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \quad (4.4)$$

となる。ただし、左辺第 1 項には  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla(\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}) = \nabla \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} + \epsilon(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  をもちいている。(4.4) 式左辺第 1 項が第 2 項に対して無視できる場合、すなわち、誘電率の空間変化  $\nabla \epsilon(\mathbf{r}) / \epsilon(\mathbf{r})$  が電場  $\mathbf{E}$  の空間変化よりゆっくりである場合には (4.4) 式は、

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (4.5)$$

と近似できる。

(4.5) 式は  $x, y, z$  成分がそれぞれ独立なので、以後、簡単の為、スカラー場  $\psi(\mathbf{r}, t)$  で考える

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (4.6)$$

(4.6) 式の解として以下のような単色光（単一角振動数  $\omega$ ）を考える

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{i\phi(\mathbf{r}) - i\omega t}. \quad (4.7)$$

ここで、 $a(\mathbf{r})$ 、 $\psi(\mathbf{r})$  は実数であり、それぞれ電場振幅、アイコナル<sup>2</sup>と呼ばれる量である。

<sup>2</sup>ギリシャ語のアイコン ( $\epsilon\iota\kappa\acute{\omega}\nu$  = 像) に由来。最近のコンピューター (Mac を代表とするウィンドウシステム) にもたくさん入っているアイコンと語源は同じ

(4.7) 式を (4.6) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla^2 a(\mathbf{r}) - a(\mathbf{r})(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})}a(\mathbf{r}) + i [2\nabla a(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r})\nabla^2\phi(\mathbf{r})] \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。 $a(\mathbf{r})$ 、 $\phi(\mathbf{r})$  は実関数であるから、(4.8) の実部、虚部はそれぞれ 0 となり、

$$\nabla^2 a(\mathbf{r}) - a(\mathbf{r})(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})}a(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.9)$$

$$2\nabla a(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r})\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.10)$$

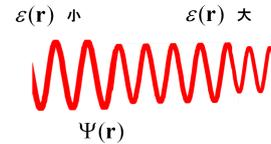
が得られる。

### 幾何光学近似

(4.4) 式から (4.5) 式への近似が成立する条件は誘電率  $\epsilon(\mathbf{r})$  の空間変化 ( $\nabla\epsilon(\mathbf{r})/\epsilon(\mathbf{r})$ ) が電場の空間変化に比べて十分小さい事であった。このような条件が満たされる場合、位置  $\mathbf{r}_0$  近傍の電磁波は誘電率  $\epsilon(\mathbf{r}_0)$  の一様媒質中を伝搬する電磁波

$$\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}_0)e^{i\phi(\mathbf{r}_0)} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-i\omega t} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}_0) = \sqrt{\epsilon(\mathbf{r}_0)} \frac{\omega}{c} \quad (4.12)$$



が僅かに変調されたものとなるはずである。ただし、 $a(\mathbf{r}_0)$  は実数であり  $\bar{\psi}(\mathbf{r}, 0)$  の  $\mathbf{r}_0$  での位相を  $\phi(\mathbf{r}_0)$  としている。

一方、(4.7) 式を  $\mathbf{r}_0$  のまわりで展開したものは

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (a(\mathbf{r}_0) + \nabla a(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dots) e^{i(\phi(\mathbf{r}_0) + \nabla\phi(\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \dots) - i\omega t} \quad (4.13)$$

となる。(4.11) 式と (4.7) 式を比較すると、 $\nabla\phi(\mathbf{r}_0)$  が位置  $\mathbf{r}_0$  での電磁波の "波数" としての意味を持つことが解る

$$\nabla\phi(\mathbf{r}) \doteq \mathbf{k}(\mathbf{r}). \quad (4.14)$$

さらに、(4.13) 式と (4.11) 式を比較すると、今考えている条件「誘電率  $\epsilon(\mathbf{r})$  の空間変化  $\nabla\epsilon(\mathbf{r})/\epsilon(\mathbf{r})$  が電場の空間変化に比べて十分小さく、位置  $\mathbf{r}_0$  近傍の電磁波は誘電率  $\epsilon(\mathbf{r}_0)$  の一様媒質中を伝搬する電磁波に "似ている" べきである」の下では、 $\phi(\mathbf{r})$  の位置に関する 2 階以上の微分が  $|\nabla\phi(\mathbf{r})|$  に比べて十分小さくなるべきである事、及び、 $a(\mathbf{r})$  の位置に関する微分が  $a(\mathbf{r})$  に比

べて十分に小さくなるべきである事も解る（これらの条件が満たされないと (4.13) 式は一様媒質中の伝搬波に "似なく" なってしまう）。

これより、(4.9) 式左辺第 1 項は第 2,3 項に比べて十分小さく成っている筈である事がわかるが、(4.9) 式で左辺 1 項を落とす近似を **幾何光学近似** と呼ぶ。□

### アイコナル方程式 (eikonal equation)

幾何光学近似の下で (4.9) 式は

— アイコナル方程式 —

$$|\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 = \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} = k_0^2 n(\mathbf{r})^2 \quad (4.15)$$

となる。

アイコナル方程式が解け、 $\phi(\mathbf{r})$  がわかると、(4.10) 式

$$2\nabla a(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r})\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.16)$$

より電場振幅  $a(\mathbf{r})$  を得る事が出来る（幾何光学近似の説明部分で述べたように、 $|\nabla a(\mathbf{r})|/|a(\mathbf{r})| \ll 1$ ,  $|\nabla^2\phi(\mathbf{r})|/|\nabla\phi(\mathbf{r})| \ll 1$  である事に注意）。

以上より、誘電率が空間的に変化している場合でも電磁波の波長に比べて誘電率の空間変化がゆっくりな場合には (4.15)、(4.16) 式より電磁場が求められる事がわかった。□

### 光線と波面

「幾何光学」では、アイコナル方程式の解  $\phi(\mathbf{r})$  から作られるベクトル場

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (4.17)$$

の積分曲線が「光線」と成る。

また、波面は

$$\phi(\mathbf{r}) - \omega t = \text{const} \quad (4.18)$$

により決定される。

波面上の近接した 2 点  $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}$  ( $\phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})$ ) に対して、

$$0 = \phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} + O(|\delta\mathbf{r}|^2) \quad (4.19)$$

が成り立つが、 $|\delta\mathbf{r}| \rightarrow 0$  で  $\delta\mathbf{r}$  は波面の接ベクトルになるので波面の接ベクトルと光線方向ベクトル  $\mathbf{e} := \nabla\phi(\mathbf{r})/|\nabla\phi(\mathbf{r})|$  は直交することが解る。

アイコナル  $\phi(\mathbf{r})$  の光線方向の微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\mathbf{r})}{dl} &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{e}) - \phi(\mathbf{r})}{\epsilon} \\ &= \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} \\ &= \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla\phi(\mathbf{r})}{|\nabla\phi(\mathbf{r})|} \\ &= |\nabla\phi(\mathbf{r})| \\ &= \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる。ただし、最後の等号ではアイコナル方程式 (4.15) を用いている。  
(4.20) 式より、アイコナルは光線に沿った積分により

$$\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} dl \quad (4.21)$$

と与えられる事が解る。

◇ ハミルトンの特性関数

$$\phi_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0). \quad (4.22)$$

これを用いるとアイコナル方程式は、

$$(\nabla\phi_H)^2 = \left( \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} \right)^2 \quad (4.23)$$

$$(\nabla_0\phi_H)^2 = \left( \frac{\omega}{c(\mathbf{r}_0)} \right)^2 \quad (4.24)$$

とかける。力学におけるハミルトンヤコビ方程式はこのアナロジーから導かれた<sup>3</sup>

<sup>3</sup>ハミルトンヤコビ方程式 (Hamilton-Jacobi equation) のひとつの表現は以下のように与えられる。

ハミルトンの主関数  $S(q, p, t) = \phi_H(q, p) - Et$  から導かれるハミルトンの特性関数  $\phi_H(q, p)$  をもちいると、運動方程式は

$$(\nabla\phi_H)^2 = 2m(E - V) = p^2 \quad (4.25)$$

となる。歴史的には、ドブロイ波 ( $\lambda = h/p$ ) の長波長近似 (幾何光学近似) としてハミルトンヤコビ方程式を考え、近似の前の波動方程式として、シュレディンガー方程式が導かれた (波動力学)。

このように、「幾何光学」の思考: マクスウェル方程式 → アイコナル方程式 (「光線」の方程式) の逆をたどって、ハミルトンヤコビ方程式 (質点の方程式) → シュレディンガー方程式 (波動方程式) が導かれたのは大変興味深い。

## 4.2 フェルマーの原理とホイヘンスの原理

この節では、アイコナル方程式からフェルマーの原理を導出する。  
アイコナル方程式 (4.15)

$$(\nabla\phi)^2 = k_0^2 n(\mathbf{r})^2 \quad (4.26)$$

において、以下の様な座標変換  $(dx, dy, dz) \rightarrow (d\xi, d\eta, d\zeta)$

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} = k_0 n(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

を考える。この座標系では、アイコナル方程式は

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)^2 = 1 \quad (4.28)$$

となる。この方程式の解は

$$\phi = a\xi + b\eta + c\zeta + d, \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1) \quad (4.29)$$

となるので、 $\phi = \text{const}$  面は  $(d\xi, d\eta, d\zeta)$  座標系では平面となる事が解る。

一方、座標変換  $(dx, dy, dz) \rightarrow (d\xi, d\eta, d\zeta)$  は拡大あるいは縮小であり角度を変えない。このため、 $(dx, dy, dz)$  座標系での  $\phi = \text{const}$  面と光線方向の関係 ( $\phi = \text{const}$  面と光線方向は直交する) は座標系  $(d\xi, d\eta, d\zeta)$  でも成立する。これは、 $(d\xi, d\eta, d\zeta)$  座標では光線の軌跡が直線となる事を意味する。

直線は最短経路なので、上の事柄を式で表すと、点  $p$  から  $q$  への光線の軌跡は

$$\delta \int_p^q d\sigma = 0 \quad (4.30)$$

を満たす、となる。ただし、座標系  $(d\xi, d\eta, d\zeta)$  の線素を  $d\sigma = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$  としており、変分の始点と終点  $p, q$  は固定されている。

もとの直交座標系  $(dx, dy, dz)$  で (4.30) を書き直すと、

$$\delta \int_p^q k_0 n(\mathbf{r}) dl = \delta \left( \omega \int_p^q \frac{dl}{c(\mathbf{r})} \right) = 0 \quad (4.31)$$

となる。ただし、座標系  $(dx, dy, dz)$  上の線素を  $dl = dx^2 + dy^2 + dz^2$  としている。

(4.31) 式の  $\int_p^q \frac{dl}{c(\mathbf{r})}$  は  $p, q$  間を光が進む時間に相当するので、(4.31) 式を言葉であらわすと、

### フェルマーの原理

「2点間を通る光は所要時間が最短となる様な経路をとる」  
となる。

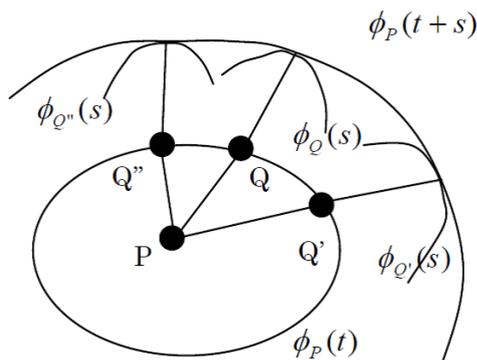
◇ フェルマーの原理の応用例

- 反射の法則, ● スネルの法則, ● 逃げ水 など

(発展問題) フェルマーの原理からホイヘンスの原理を導出する。

### ホイヘンスの原理

「波源  $P$  から出た波の時間  $t$  後の波面を  $\phi_P(t)$ 、また、この波面上の点  $Q$  から出た波の時間  $s$  後の波面を  $\phi_Q(s)$  とすると、波源  $P$  から出た波の時間  $t+s$  後の波面  $\phi_P(t+s)$  は波面の集合  $\{\phi_Q(s) \mid Q \in \phi_P(t)\}$  の包絡線となる。」



< ヒント >

$\phi_Q(s)$  は波面  $\phi_P(t+s)$  と接している事を示せばよい。もし交わっていた場合、どんな矛盾が存在するか?。フェルマーの原理を使って背理法で証明せよ。

## 4.3 レンズ系

カメラやメガネなど身近なものの中で活躍しているレンズを幾何光学の枠組みで記述する。また、レンズの公式やレンズを組み合わせていったとき、どこに像が生じるかを議論する。応用上も球面が作りやすいので、この節の議論は球面に限る。

(a) 近軸近似

図 4.1 の様に、屈折率  $n_1$  の物質と屈折率  $n_2$  の物質が半径  $r$  の球面で接している場合を考える。球の中心  $O$  を通る直線を光軸と呼ぶ。球面左の光軸上の一点  $P$  から、球面右の光軸上の 1 点  $Q$  に光線が到達する場合を考える。屈折率は  $n_2 > n_1$  を満たしているとする。また、 $s_1, s_2, r > 0$  とする。この時、サイン定理から

$$\frac{s_1 + r}{\sin(\pi - \theta_1)} = \frac{\zeta_1}{\sin \beta} \quad (4.32)$$

$$\frac{s_2 - r}{\sin(\theta_2)} = \frac{\zeta_2}{\sin(\pi - \beta)}. \quad (4.33)$$

スネルの法則

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (4.34)$$

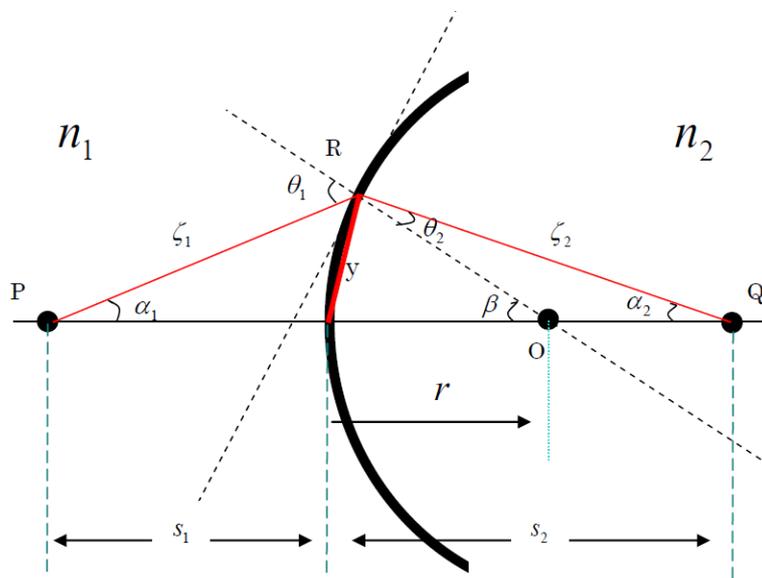


図 4.1: 近軸近似

より、

$$\frac{s_1 + r}{\zeta_1} = \frac{n_2 s_2 - r}{n_1 \zeta_2} \quad (4.35)$$

が得られる。ここで光線が光軸からあまり離れないという近似（近軸近似）をすると、 $s_1 \cong \zeta_1$ ,  $s_2 \cong \zeta_2$  となるから、(4.35) 式は

$$\begin{aligned} 1 + \frac{r}{s_1} &= \frac{n_1}{n_2} \left( 1 - \frac{r}{s_2} \right) \\ \Rightarrow \frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} &= \frac{n_2 - n_1}{r} \end{aligned} \quad (4.36)$$

となる。この式はもはや、 $\zeta_1$  ( $\alpha_1$ ) や  $\zeta_2$  ( $\alpha_2$ ) に依存していないことから、1点  $P$  から発した近軸な光線はすべて  $Q$  を通ることがわかる。 $P$  の像が  $Q$  にできることがわかる。

ここでいくつか例題を解こう。

例 1 .  $n_1 = 1, n_2 = 1.5, s_1 = 4, r = 1$  の場合

この屈折率の組み合わせは、空気中のガラスの場合に相当している。(4.36) を計算すると、 $s_2 = 6$  が得られる。 $Q$  に**実像**ができる。

例 2 .  $n_1 = 1, n_2 = 1.5, s_1 = 0.5, r = 1$  の場合

例 1 とは異なり、 $s_2 = -1$  となってしまう。これは球面境界の右側に像ができず、発散光となることを意味している。この場合、境界の左側の  $Q$  に虚像ができ、そこから、あたかも境界がないかのごとく光が伝わるという記

述が可能である。(詳しくは授業で)

例 2 のような場合も系統的に扱うために、以降は、図 4.2 のように座標系を定めて記述する。ここでは、 $P$  の  $x$  座標が負になっていることに注意

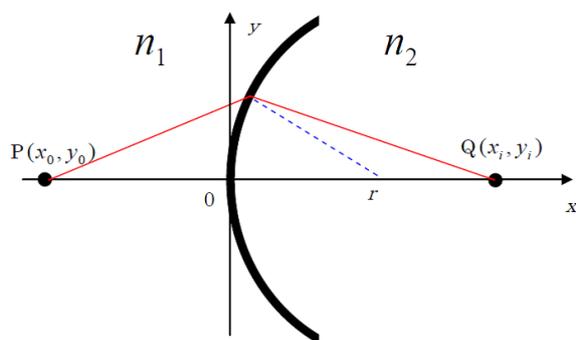


図 4.2: レンズを扱う為の座標系

この座標系では、

$$-\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (4.37)$$

この表記では、 $r$  が負の場合も扱うことが可能である。これは、図 4.2 において、 $n_1$  の側に球面がある場合に相当する(球の中心が負の側にある)。

例 3 .  $n_1 = 1, n_2 = 1.5, x_1 = -2, r = -1$  の場合  
 $x_i = -1.5$  となる。したがって虚像となり発散光として振る舞うことがわかる。

例 4 . 平行光が入射する場合

例 1 の条件では  $s_1 = \infty$  とおくと、 $s_2 = 3$  となる。

例 3 の条件では  $x_0 = -\infty$  とおくと、 $x_i = -3$  となる。

それぞれ、半径  $r$  の 3 倍 ( $n_2/(n_2 - n_1)$ ) の位置に実像または虚像が出来る事になる。

#### (b) 薄いレンズの公式

正の曲率の球面と負の曲率の球面が合わさった場合の結象について考える。

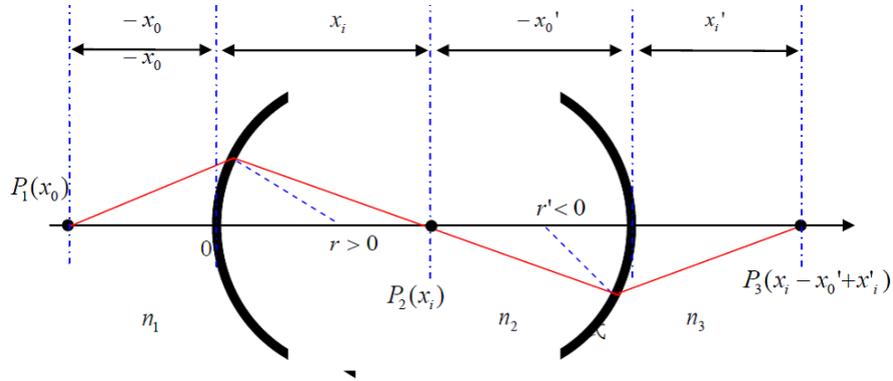


図 4.3: 薄いレンズを扱う為の座標系

(4.37) 式より、

$$-\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_2}{x'_i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (4.38)$$

$$-\frac{n_2}{x'_0} + \frac{n_3}{x'_i} = \frac{n_3 - n_2}{r'} \quad (4.39)$$

レンズの厚さ  $d$  を以下の様に定義する。

$$d := x_i - x'_0 \quad (4.40)$$

(4.40) を (4.38) 式に代入し  $x_i$  を消去すると、

$$-\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_2}{x'_0 + d} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \quad (4.41)$$

ここで、「**薄いレンズ**」の近似をする。 $d$  は他に比べて非常に小さいものとする。すなわち、 $d \ll |x_0|, |x'_0|, |r|, |r'|$ 。この場合、(4.41) 式は、

$$-\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_2}{x'_0} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (4.42)$$

となるから、これを持ちいて、(4.39) 式から  $x'_0$  を消去すると、以下の式が得られる。

$$-\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_3}{x'_i} = \frac{n_3 - n_2}{r'} + \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (4.43)$$

レンズの外側は空気であるとして、 $n_1 = n_3 = 1$  とし、 $n_2 = n$  とおくと、

$$-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x'_i} = \frac{1 - n}{r'} + \frac{n - 1}{r} \quad (4.44)$$

が得られる。右辺を、焦点距離  $f$  の逆数であると定義する。すなわち、

$$\frac{1}{f} := \frac{1 - n}{r'} + \frac{n - 1}{r}. \quad (4.45)$$

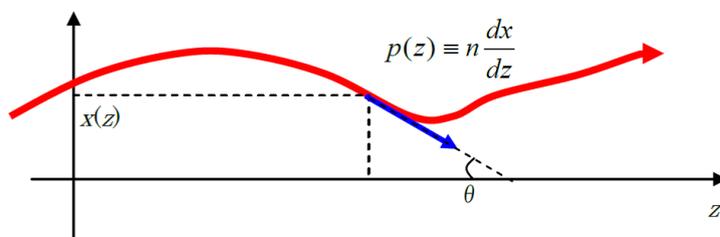
この  $f$  をもちいて (4.44) を書き直すと**薄いレンズの公式**

$$-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x'_i} = \frac{1}{f} \quad (4.46)$$

が得られる。 $-x_0 \rightarrow a, x'_i \rightarrow b$  と置き換えると「レンズの公式」としてよく知られた形になる。

#### 4.4 ABCD 行列によるガウス光学系の記述

光学系が光軸の周りに軸対称な系を考える。これを**ガウス光学系**と呼ぶ。ガウス光学系での結像を考えるために、以下のような座標系を考える。ここで光軸を  $z$  軸とする。



レンズなどの媒質で光線（図中の赤線） $\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$  が写像されていくと考える<sup>4</sup>。ここで、 $p(z)$  は屈折率を考慮した波数であり、近軸近似（光軸と  $p$  のなす角が 1 より十分小さい）のもとで次のようにあたえられる

$$p(z) := n(z) \frac{dx}{dz} \cong n\theta. \quad (4.47)$$

光学素子を通過することによる  ${}^t(x, p)$  の変化を以下の様な 1 次変換であらわす

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = T_{(ABCD)} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$T_{(ABCD)} := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

この時、相反性より、 $A = D$  かつ  $\det T_{(ABCD)} = 1$  が成立する<sup>5</sup>（宿題）。行

<sup>4</sup>力学において、質点が位相空間  $(x, p)$  内を運動することに対応している。

<sup>5</sup>相反性: 逆向きに進む光線も同じ ABCD 行列で記述出来るものとする。すなわち、(4.48) の逆向き

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ -p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -p_1 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

が成立するものとする。ここで、光線には向きがあるので、 $p$  の符号がマイナスである事に注意する事。

列  $T_{(ABCD)}$  は ABCD 行列と呼ばれる。

例 1. 屈折率  $n$  の媒質中を  $z$  方向に  $d$  だけ進む場合の ABCD 行列。

向きが変化しないから、 $p_1 = p_0$ ,  $x_1 = x_0 + (dx/dz)d = x_0 + (d/n)p_0$  が成り立つ。故に、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

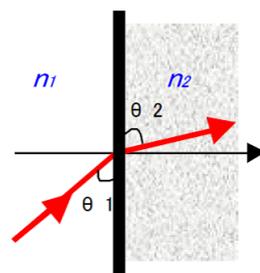
例 2. 平面境界

屈折率は  $p$  の中にすでに考慮されているので、近軸近似のもとで、

$$\begin{aligned} p_1 &= n_2 \frac{dx}{dz} \approx n_2 \theta_2 \approx n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 \\ &\approx n_1 \theta_1 = n_1 \frac{dx}{dz} = p_0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

すなわち、 ${}^t(x, p)$  という表示の下では屈折率の異なる媒質中への光線の入射は何も変化を起こさないことになる。故に、

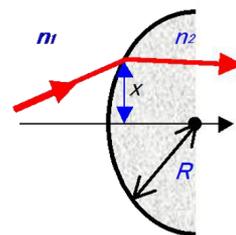
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$



例 3. 球面境界

右図及び、図 4.1 の表記で議論する。

$$\begin{aligned} p_1 &= -n_2 \frac{x}{s_2} = -x \left( \frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{s_1} \right) \\ &= -x \left( \frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{p_0}{x} \right) \\ &= p_0 - \left( \frac{n_2 - n_1}{R} \right) x \end{aligned} \quad (4.54)$$



となる<sup>6</sup>。これより、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1)/R & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

<sup>6</sup>第一式のマイナス符号は球面境界の右側はマイナスの傾きであることに由来する。

(問題)

1. 相反性が成り立つとき、 $A = D$  かつ、

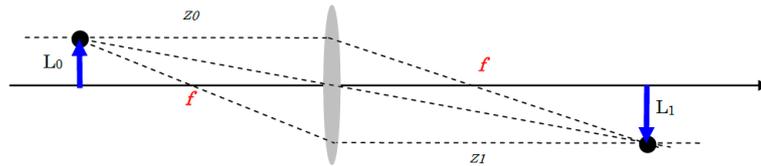
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1 \quad (4.56)$$

である事を証明せよ。

2. 焦点距離  $f$  のレンズに対する ABCD 行列の表式が以下になることを示せ

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

#### 4.5 ABCD 行列による結像論



上図のようにレンズによって物体  $L_0$  を  $L_1$  に結像させることを考える。 $L_0$  から発せられた光は空中を伝搬し、レンズを透過したのち、更に空中を伝搬して結像点  $L_1$  に至るので、ABCD 行列を使ってこの光線を記述すると、

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_1}{f} & z_0 + z_1 - \frac{z_0 z_1}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{z_0}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

となる。この式より、 $L_0$  から様々な向きに (様々な  $\alpha_0$  で) 発せられた光が結像点  $L_1$  に集光される ( $L_1$  が光の出射方向  $\alpha_0$  に依存しなくなる) 条件は、

$$z_0 + z_1 - \frac{z_0 z_1}{f} = 0 \quad (4.60)$$

となる事がわかる。(4.60) 式は (4.46) 式と比べる事により薄いレンズの式と等価である事が確認できる。

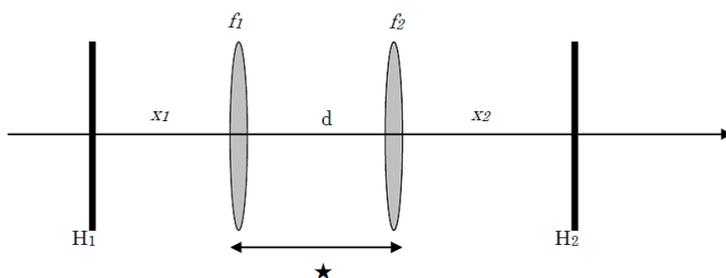
また、(4.60) 式が満たされる時、(4.59) 式の ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} -z_1/z_0 & 0 \\ -1/f & -z_0/z_1 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

となる。この行列の意味するところは、(1枚の) 薄いレンズによる像は反転し、 $z_1/z_0$  倍に拡大されるということである。

## 4.6 組み合わせレンズへの応用

ABCD 行列を用いて組み合わせレンズについて考える。まず、図のような  $H_1$  平面から  $H_2$  平面に至る ABCD 行列を求めてみよう。空間の屈折率は簡単のために 1 であるとする。



★部分の ABCD 行列を先ず計算する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{1}{F} & -\frac{d}{f_2} + 1 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

$$\frac{1}{F} := \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (4.63)$$

$H_1 \rightarrow H_1$  全体の計算

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{F} & -\frac{d}{f_2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{x_2}{F} & x_1 + x_2 + d - \frac{dx_1}{f_1} - \frac{dx_2}{f_2} - \frac{x_1 x_2}{F} \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{d}{f_2} - \frac{x_1}{F} \end{pmatrix} \quad (4.64) \end{aligned}$$

$x_1, x_2$  は任意なので、この表式が薄いレンズと等価になることを要求する。すなわち、対角要素が 1 であることから、

$$\frac{d}{f_1} + \frac{x_2}{F} = 0 \quad (4.65)$$

$$\frac{d}{f_2} + \frac{x_1}{F} = 0 \quad (4.66)$$

である。(4.64) の ABCD 行列の (1, 2) 成分に (4.65), (4.66) を代入すると、0 であることがすぐに示せる。

まとめると、 $x_1, x_2$  を (4.65), (4.66) のように定めると ABCD 行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

となる。これは、薄いレンズの公式と等価であることから、 $H_1 - H_2$  全体として一つの薄いレンズとして考えればよいことがわかる。

この時、 $H_1$  および  $H_2$  面を「主平面」とよぶ。したがって、複数の組のレンズに対しては、主平面を考え、主平面から、物体、像までの距離に対してレンズの公式を用て考えればよい。

例 1.

2つのレンズ（焦点距離  $f_1$ 、 $f_2$ ）を密接しておいた場合（ $d = 0$  に相当）の合成焦点距離  $f$  を求めよ。

（解）（4.63）より、 $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$  である。また、（4.65）（4.66）より  $x_1 = x_2 = 0$  となるのでレンズの位置が主平面となる。

（別解） 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

を計算する。

例 2.

$f_1 = f_2 = 10\text{cm}$ ,  $d = 40\text{cm}$  の2つのレンズの組を考える。合成焦点距離  $F$  および主平面はどうなるか？。物体の主平面  $H_1$  からの距離を  $10\text{cm}$  とすると、主平面  $H_2$  からどの位置に像は結像するか？。それはどのような像か？。

（略解）  $F = -5\text{cm}$ , 主平面はレンズから左右に  $20\text{cm}$ 。主平面  $H_2$  から内側に  $3.3\text{cm}$  のところに正立像が結像する。

## 問題

1.  $F$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  を（4.63）（4.65）（4.66）のように選ぶと  $H_1 - H_2$  平面の ABCD 行列が確かに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

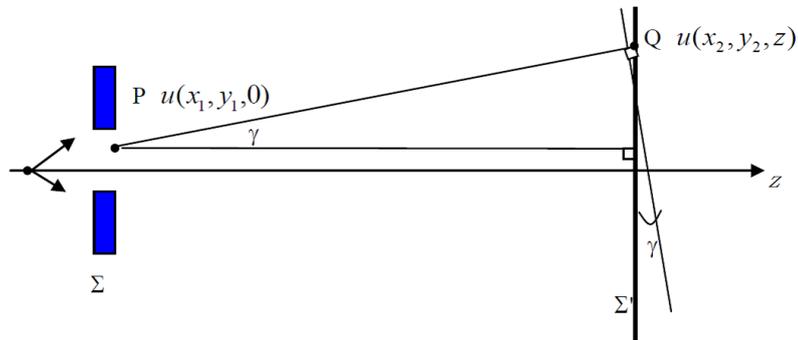
となることを確認せよ。

2. 3つの焦点距離の同じレンズを考え、互いに  $d$  の間隔でおく。このときの主平面および合成焦点距離を求めよ。

## 5 光の回折

回折とは光が物体を回り込んで伝播する現象である。ここでは、ある軸上を光が伝播する場合を考え、小さい開口を通過する際にどのようにその伝播が変化するかを考えよう。そのために、近軸近似を考える。

### 5.1 近軸近似



ホイヘンスの原理を用いてスクリーン上の  $Q$  点での電場を考える。ここでのホイヘンスの原理は 4 章でやったようなフェルマーの原理から導かれた限定的なものではなく、波動としての性質を表すものである。基本的には点光源からの双極子放射を球面で近似した発想である。

開口  $\Sigma$  中の点  $P$  から発生する 2 次波の  $\Sigma'$  平面への投影成分は

$$u(x_2, y_2, z_2) \approx \alpha \frac{-ik_0 r}{r} \cos \gamma u(x_1, y_1, 0). \quad (5.1)$$

ここに  $\alpha = i/\lambda_0$  である<sup>7</sup>。  $\Sigma'$  面上での光電場はすべての  $P$  点からの 2 次波

<sup>7</sup> $\alpha$  の決定

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\pi}{\alpha} \quad (5.2)$$

開口  $\Sigma$  を無くして、平面波かつ  $x_2 = y_2 = 0$  の点を見ると、

$$u(x_1, y_1) = 1 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} u(0, 0, z) &= \frac{\alpha e^{-ik_0 z}}{z} \iint e^{-\frac{ik_0}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} dx_1 dy_1 \\ &= \frac{\alpha e^{-ik_0 z}}{z} \left( \sqrt{\frac{2z\pi}{ik_0}} \right)^2 \\ &= \alpha \frac{2\pi}{ik_0} e^{-ik_0 z} = \frac{\lambda_0}{i} \alpha e^{-ik_0 z} \end{aligned} \quad (5.4)$$

これより、 $\alpha = i/\lambda_0$ 。

の重ね合わせであるから、

$$u(x_2, y_2, z) = \frac{i}{\lambda_0} \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \cos \gamma dx_1 dy_1 \quad (5.5)$$

と表せる。ここで、距離  $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2}$  である。

$PQ$  が  $z$  軸とほぼ平行な場合、すなわち  $\gamma \approx 0$ ,  $\cos \gamma \approx 1$  の場合を考える (近軸近似)。この時、(5.5) 式右辺の  $1/r$  の項は  $1/z$  と近似できる。しかし、 $e^{-ik_0 r}$  の中の  $r$  に関しては、

$$e^{-ik_0 r} = e^{-ik_0 z} e^{-i2\pi(r-z)/\lambda_0} \quad (5.6)$$

となるため、今考えている典型的な周波数と長さのスケール ( $O(\lambda_0) \sim 1\mu\text{m}$ ,  $O(r) \sim O(z) \sim \text{m}$ ) では  $|(r-z)/\lambda_0| \gg 1$  と成り、 $r \approx z$  の近似をせずにきちんと扱わないといけない。

このため、 $e^{-ik_0 r}$  の中の  $r$  に関しては、

$$\begin{aligned} r &= z \sqrt{1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{z}\right)^2} \\ &= z + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2z} + \dots \\ &= z + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z} - \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1}{z} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z} + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

の第 4 項までをとる事とする。

この時、(5.5) 式は、

$$\begin{aligned} u(x_2, y_2, z) &= \\ A_0(x_2, y_2, z) &\iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{ik_0(x_2 x_1 + y_2 y_1)/z} e^{-ik_0(x_1^2 + y_1^2)/2z} dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

となる。ただし、

$$A_0(x_2, y_2, 0) = \frac{i e^{ik_0 z}}{\lambda_0 z} e^{-ik_0(x_2^2 + y_2^2)/2z} \quad (5.9)$$

である。(5.8) 式を回折のフレネル (Fresnel) 近似と呼ぶ。

#### ● フラウンホーファー (Fraunhofer) 近似

(5.7) 式の右辺第 4 項が十分小さい場合には、(5.8) 式は以下のように変形される。

$$u(x_2, y_2, z) = A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{ik_0(x_2 x_1 + y_2 y_1)/z} dx_1 dy_1 \quad (5.10)$$

これを回折の**フラウンホーファー近似**と呼ぶ。

#### フラウンホーファー近似の条件

(5.7) 式の右辺第 4 項が十分小さいという条件を以下でもう少し考えてみる。

開口  $\Sigma$  の  $x, y$  座標の最大値を  $x_{1\max}, y_{1\max}$  とおくと、

$$\frac{k_0}{2z}(x_{1\max}^2 + y_{1\max}^2) \ll 1. \quad (5.11)$$

開口  $\Sigma$  を円とすると、その半径を  $D$  として、

$$x_{1\max}^2 + y_{1\max}^2 = 2D^2 \quad (5.12)$$

なので、条件式 (5.11) は、

$$z \gg \frac{k_0}{2} 2D^2 = \frac{2A}{\lambda_0} \quad (5.13)$$

$A := \pi D^2$  (開口  $\Sigma$  の面積)

となる。上式 (5.13) より分かる様にフラウンホーファー近似が成り立つのは開口  $\Sigma$  から測定位置までの距離  $z$  が開口の面積  $A$  を光の波長  $\lambda_0$  で割ったものに比べて十分大きいときである。

例. 開口が 1mm,  $\lambda_0 = 1\mu\text{m}$  の場合、 $z \gg 10^{-6}\text{m}^2 / 10^{-6}\text{m} \sim 1\text{m}$  であればフラウンホーファー近似が使える。

#### フラウンホーファー回折における孔内電場と回折光の関係

(5.10) 式は、 $f_x = -k_0 x_2 / z$ ,  $f_y = -k_0 y_2 / z$  とおくと、

$$u(x_2, y_2, z) = A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \quad (5.14)$$

と成るが、これは、**フラウンホーファー近似の成り立つ領域では  $x_2, y_2$  面の電場分布  $u(x_2, y_2)$  は開口内の電場分布  $u(x_1, y_1)$  のフーリエ変換と成っている事**を意味する。 $f_x, f_y$  を空間 (フーリエ) 周波数と呼ぶ。

## 5.2 フラウンホーファー回折の具体例

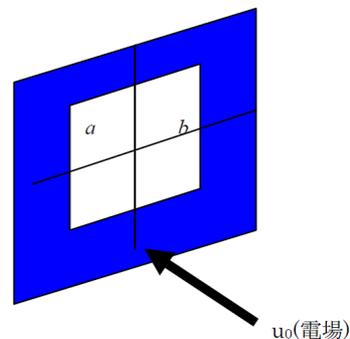
単一開口の場合を考える。

- 方形 (大きさ  $a \times b$ ) の場合

方形中の電磁場分布は一様  $u(x_1, y_1, 0) = u_0$  とすると

(5.14) 式は、

$$\begin{aligned} u(x_2, y_2, z) &= A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \\ &= A_0(x_2, y_2, z) u_0 a b \operatorname{sinc}\left(\frac{ax_2}{\lambda_0 z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{by_2}{\lambda_0 z}\right) \end{aligned} \quad (5.15)$$



ただし、 $\operatorname{sinc} X := \sin(\pi X)/\pi X$  である。  
これより、強度分布は

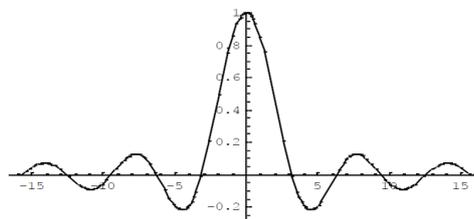
$$\begin{aligned} I(x_2, y_2, z) &= |u(x_2, y_2, 0)|^2 \\ &= I_0 \operatorname{sinc}^2 X \operatorname{sinc}^2 Y \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$X := \frac{ax_2}{\lambda_0 z}, \quad Y := \frac{by_2}{\lambda_0 z} \quad (5.17)$$

となる。

(発展)

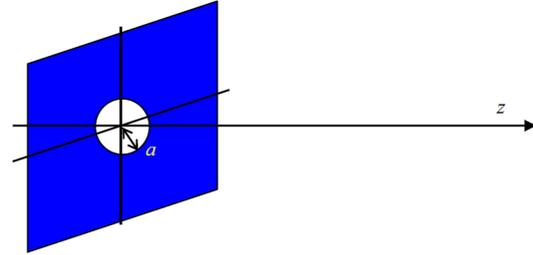
$\sin x/x$  のグラフは右のようになることから  $x_2 - y_2$  面上には四角い枠の像が連続的に現れる。2次元面で書くとうなるか考えてみよう。



• 円形の場合

極座標

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \theta_1, & y_1 &= r_1 \sin \theta_1, \\ x_2 &= r_2 \cos \theta_2, & y_2 &= r_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$



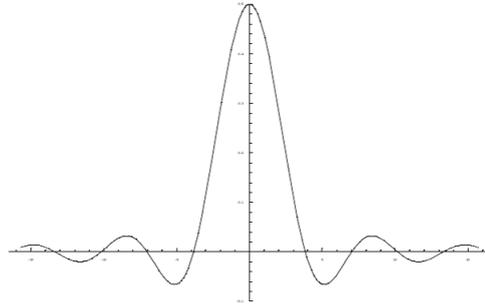
で考えると (5.14) 式は、

$$\begin{aligned} u(r_2, \theta_2, z) &= A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \\ &= A_0(x_2, y_2, z) u_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-ik_0 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)/z} r_1 dr_1 d\theta_1 \\ &= A_0(x_2, y_2, z) u_0 (\pi a)^2 \frac{2J_1(k_0 a r_2 / z)}{k_0 a r_2 / z} \end{aligned} \quad (5.18)$$

ただし、 $J_1$  は 1 次のベッセル関数である。また、方形中の電磁場分布は一様  $u(x_1, y_1, 0) = u_0$  と仮定している。

(発展)

$J_1(x)/x$  のグラフは下記のようになることから  $x_2 - y_2$  面上には四角い枠の像が連続的に現れる。2次元面で書くとどうなるか考えてみよう。



問題

(5.18) 式が成り立つことを示せ。

Hint: ヤコビ・ポアンカレの展開式

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(z) i^m e^{im\theta} \quad (5.19)$$

と、

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (5.20)$$

を積分形であらわした

$$x^n J_n(x) = \int x^n J_{n-1}(x) dx \quad (5.21)$$

を用いよ。