

6. 光散乱

6.1 振動する局所的な湧き出しによる場と放射

$$\text{Maxwell 方程式} \quad \left[\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

ρ 、 \mathbf{j} は $x=0$ の近傍に局所的に存在するものとする。

調和関数的な時間変化の湧き出しを考える。

$$\left[\begin{array}{l} \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \end{array} \right.$$

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c^2} \end{array} \right. \quad \text{遅延ポテンシャル}$$

十分遠方で $\rho = 0$ 、 $\mathbf{j} = 0$ では、

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k\mu_0} Z_0 \nabla \times \mathbf{B} = i \frac{c}{k} \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{ただし } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

遅延ポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3x' \int dt \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right)$$

と書き換えることが出来る。時間積分を実行すると、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$

遠方領域 $kr \gg 1$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' \quad \mathbf{n} \text{ は } \mathbf{x} \text{ 方向の単位ベクトル}$$

このとき⑩は

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' && r \text{ のみに依存する球面波} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^n \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' \end{aligned}$$

$n=0$ のみを採用する (双極子近似)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' \\ \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' &= -\int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}) d^3x' \\ &= -i\omega \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= -i\omega \mathbf{P} \end{aligned}$$

この場合

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= -\frac{i\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{P} \frac{e^{ikr}}{r} && \text{球面波} \\ \left(\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{k^2}{4\pi} Z_0 (\mathbf{n} \times \mathbf{P}) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \mathbf{E} &= Z_0 \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{n} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} \end{aligned} \right. && Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \text{ 真空のインピーダンス} \end{aligned}$$

振動する双極子モーメント \mathbf{P} が単位時間、単位立体角あたりに放射するエネルギーの時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[r^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right] \\ &= \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 |\mathbf{P}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad \text{双極子放射}$$

6.2 長波長における散乱

A. 小散乱体面に誘導される双極子による散乱

外場 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{J}_{\text{分極}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{J}_{\text{分極}}$ により電磁波が放射

$$\text{入射} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}_{in} &= \mathbf{e}_0 E_0 e^{ikn_0 \cdot \mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_{in} &= \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_{in} / Z_0 \end{aligned} \right. \quad \text{放射} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}_{sc} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [(\mathbf{n} \times \mathbf{P}) \times \mathbf{n}] \\ \mathbf{H}_{sc} &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{sc} / Z_0 \end{aligned} \right.$$

(外部の比誘電率は 1 とする)

偏り \mathbf{e}_0 で方向 \mathbf{n}_0 の単位入射エネルギー流速あたりに、偏り \mathbf{e} で方向 \mathbf{n} に単位立体角、単位時間あたりに放出されるエネルギー（微分散乱断面積）は

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{e}; \mathbf{n}_0, \mathbf{e}_0) = \frac{\gamma^2 \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_{sc}|^2}{\frac{1}{2Z_0} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_{in}|^2} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{P}|^2$$

$$\left(\begin{array}{l} \omega = ck : \omega^4 \text{依存性} \\ |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{P}| : \text{偏光依存性} \end{array} \right) \quad \left(\because |\mathbf{S}| = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}|^2 \right)$$

B. 小誘電体による散乱

$$\begin{aligned} \sigma_{pol} &= 3\epsilon_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) |\mathbf{E}_0| \cos\theta \\ &= 3\epsilon_0 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) |\mathbf{E}_0| \cos\theta \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} a^3 \mathbf{E}_0$$

この場合

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \propto k^4 a^6 \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{//}}{\partial \Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|^2 \cos^2\theta \quad \leftarrow \mathbf{e}_0^{(1)} \text{での入射} \\ \frac{\partial \sigma_{\perp}}{\partial \Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|^2 \quad \leftarrow \mathbf{e}_0^{(2)} \text{での入射} \end{array} \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で } \frac{\partial \sigma_{\perp}}{\partial \Omega} = 0$$

例. 青空は偏光している。どの向きに偏光しているか？上の議論をもちいて述べよ。

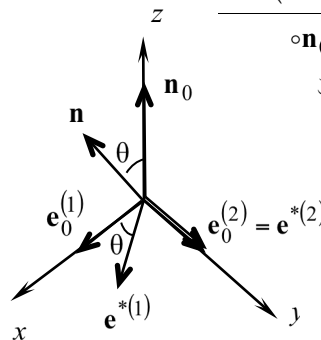
(ヒント：太陽との位置関係を考える。青空は空気中の窒素や酸素分子による散乱)

\mathbf{e}_0 は入射電磁場 \mathbf{E}_0 の単位方向ベクトル

$$\mathbf{e}^* = (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_0) \times \mathbf{n}$$

○ \mathbf{n}_0 と \mathbf{n} で張る面を 散乱面 と呼ぶ

この場合は xz 面



$$\mathbf{e}^* = (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_0) \times \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_0 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_0) \mathbf{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^{*(1)} = \mathbf{e}_0^{(1)} - \mathbf{n} \sin\theta \\ \mathbf{e}^{*(2)} = \mathbf{e}_0^{(2)} \end{cases}$$

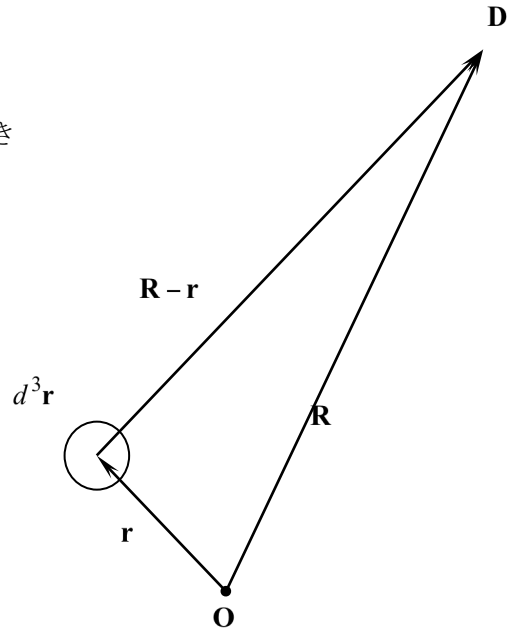
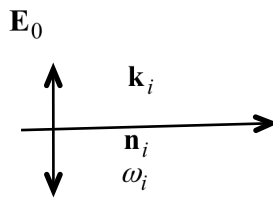
6.3. 誘電率の揺らぎによる電磁波の散乱

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{リアルな電荷、電流なし。誘導電流（誘導電荷）のみを考慮する。}$$

この方程式は入射波と散乱光の和について成立するべき

$$\begin{array}{l} \text{入射 } \mathbf{E}_i \quad \mathbf{D}_i \quad \mathbf{H}_i \quad \mathbf{B}_i \\ \text{散乱 } \mathbf{E}_s \quad \mathbf{D}_s \quad \mathbf{H}_s \quad \mathbf{B}_s \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_s \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_s \end{cases}$$



E_s 等は小さいと考えて逐次近似的に

E_s 等の満たすべき方程式を導く。

0th order

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}_i = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_i = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}_i = \frac{\partial \mathbf{D}_i}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}_i = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}_i \\ \mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{H}_i \\ \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \text{ より}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_i}{\partial t^2}$$

$$\therefore \Delta \mathbf{E}_i - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_i}{\partial t^2} = 0 \quad \left(k_i = \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} \omega_i \right)$$

この物体の誘電率 ϵ は空間的にも時間的にも揺らいでいるものとする。

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 (\epsilon \mathbf{I} + \delta \epsilon(\mathbf{r}, t))$$

\mathbf{I} : 単位テンソル

$$\langle \epsilon(\mathbf{r}, t) \rangle = \epsilon_0 \epsilon \quad \langle \delta \epsilon(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$$

1th order

平面波の入射に関して、誘電率の揺らぎを摂動として1次まで取り込んで計算する
(ボルン近似)

$$\varepsilon = \varepsilon + \delta\varepsilon$$

によって E_s が生成される。 E_s は δ の order

全体の場についても同様に

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}$$

が成立し、 \mathbf{E}_i の成分に関しては等式が成立するので

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_s}{\partial t^2}$$

も成立する。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)) (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_i + \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_s + \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i + \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_s}{\mathbf{D}_i} \quad \frac{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_s}{\delta^2 \text{のorder}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_s = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_s + \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D}_s - \frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon} \mathbf{E}_i \quad \dots (\star)$$

$$\Delta \mathbf{D}_s - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}_s}{\partial t^2} = -\nabla \times \nabla \times \{ \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i \}$$

ヘルツベクトル(Hertz vector)

$$\mathbf{D}_s = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}$$

$$\Delta \mathbf{\Pi} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i}{\text{湧き出し}}$$

この式は以前に見たことがある。湧き出しがある場合のベクトルポテンシャルが満たすしきだ！故に

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}$$

$$t' = t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}|$$

これを用いて

$$\mathbf{D}_s(\mathbf{R}, t) = \nabla_R \times \nabla_R \times \left[\frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r} \right]$$

電場 \mathbf{E}_s はこの \mathbf{D}_s からの成分と (☆) における右辺第 2 項からの寄与がある。散乱体に近い

場合は第 2 項は有効だが、 \mathbf{R} がより十分に離れていれば 0 だ。

そのような離れた場所での「散乱場」を考える。ここで、 \mathbf{n}_i は入射偏光の単位ベクトルである。

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t) = \nabla_R \times \nabla_R \times \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r} \right]$$

$$= \nabla_R \times \nabla_R \times \left[\frac{E_0}{4\pi\varepsilon} \int \frac{(\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t') : \mathbf{n}_i)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega_i t'} d^3\mathbf{r} \right]$$

揺らぎテンソル $\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t')$ の時間フーリエ変換を考える

$$\frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t')}{\text{テンソル}} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\text{テンソル}} e^{i\omega t'}$$

さらに遠方近似

$$\left(\begin{array}{l} |\mathbf{R} - \mathbf{r}| = |\mathbf{R}| - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}_s \quad \hat{\mathbf{k}}_s = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \\ t' = t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{k}}_s \end{array} \right)$$

を行うと、散乱波

$$\left(\begin{array}{l} \omega_s = \omega_i - \omega \\ \mathbf{k}_s = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} (\omega_i - \omega) \hat{\mathbf{k}}_s = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} \omega_s \hat{\mathbf{k}}_s \quad \hat{\mathbf{k}}_s = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \\ \mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s \end{array} \right)$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t) = \frac{E_0}{4\pi\epsilon} e^{-i\omega_i t} \nabla_R \times \nabla_R \times \left[\int \frac{d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} e^{i\left(\mathbf{k}_i - \frac{\sqrt{\epsilon}(\omega_i - \omega)}{\omega_s} \hat{\mathbf{k}}_s\right) \cdot \mathbf{r}} \times \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} (\delta\epsilon(\mathbf{r}, \omega) : \mathbf{n}_i) e^{i\frac{\sqrt{\epsilon}}{c}(\omega_i - \omega) \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{R}} \right]$$

$$= \frac{E_0}{4\pi\epsilon} e^{-i\omega_i t} \nabla_R \times \nabla_R \times \left[e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R}} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} (\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i) \right]$$

ここで、指数関数の肩で $(\omega_i - \omega)$ となった場合に、 ω は小さいと考えて ω 積分の外に ω_s として取り出した。さらに、遠方近似をもう一度おこなう。すなわち、

$$\left[\begin{array}{l} |\mathbf{R}-\mathbf{r}|^{-1} \rightarrow \mathbf{R}^{-1} \\ \nabla_R \times \rightarrow i\mathbf{k}_s \times \end{array} \right. \quad \text{と置き換える。}$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t) = \frac{-E_0}{4\pi\epsilon} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R} - \omega_i t)} \mathbf{k}_s \times \mathbf{k}_s \times \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} (\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i)$$

ここで、 \mathbf{n}_s を \mathbf{E}_s 方向の単位ベクトルとする。すなわち、

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{k}_s = 0 \\ \mathbf{E}_s = E_0 \mathbf{n}_s \end{array} \right. \quad \text{とすると、}$$

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R}, t) = \frac{-E_0}{4\pi\epsilon R} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R} - \omega_i t)} \mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{k}_s \times \mathbf{k}_s \times (\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i))$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$E_s^0(\mathbf{R}, t) = \frac{E_0 \omega_s^2}{4\pi\epsilon R} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R} - \omega_i t)} \delta\epsilon_{si}(q, t)$$

ここで

$$\delta\epsilon_{si}(q, t) = \mathbf{n}_s \cdot (\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i)$$

は揺らぎテンソルである。①、②から、いくつかのことがわかる。

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R}, t) \propto \frac{e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R}}}{R} \quad \rightarrow \quad \text{球面波}$$

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R}, t) \propto E_0 \delta\epsilon_{si}(q, t) \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{揺らぎに比例} \\ \bullet \text{入射振幅に比例} \\ \bullet \langle \mathbf{E}_0^s(\mathbf{R}, t) \rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R}, t) \propto e^{-i\omega_i t} \quad \rightarrow \quad \text{入射光の振動数で振動}$$

異方性がある場合への拡張

ここまで $\delta\epsilon$ はスカラーとして扱ってきたが實際上、物質に異方性があるとテンソル量にな

り、これを取り入れる。

$$\sum_j \frac{\delta \varepsilon_{ij}}{\begin{matrix} 3 \times 3 \\ \text{行列} \end{matrix}} E_j(\mathbf{r}, t) \rightarrow (\delta \varepsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i) \quad \text{とかく。}$$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = E_0 \mathbf{n}_i e^{i(k_i \cdot \mathbf{r}_i - \omega_i t)}$$

パワースペクトル

$$I_s(q, \omega_s) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t) e^{-i\omega_s t} dt$$

$$C(t) = \langle \mathbf{E}_s^*(t - t_0) \mathbf{E}(t_0) \rangle_t - \langle \mathbf{E}_s \rangle^2$$

$$= \langle \mathbf{E}_s^*(t) \mathbf{E}(0) \rangle \quad \text{電場時間相関関数}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}_s^*(t+s) \mathbf{E}(s) ds \quad \rightarrow e^{i\omega_i(t+s)} e^{i\omega_i s} \rightarrow e^{i\omega_i t}$$

s の部分が消えるので積分の外に出る。

$$\omega \equiv \omega_i - \omega_s \quad (\text{入射光と散乱光の振動数差})$$

とすると

$$C(t) = |\mathbf{E}_0|^2 \left(\frac{k_s^2}{4\pi \varepsilon R} \right)^2 \langle \delta \varepsilon_{si}^*(q, t) \delta \varepsilon_{si}(q, 0) \rangle e^{i\omega_i t}$$

$$I_s(q, \omega_s) = \frac{I_0}{8\pi^2 R^2} \left(\frac{\omega_i^4}{c^5} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \delta \varepsilon_{si}^*(q, t) \delta \varepsilon_{si}(q, 0) \rangle e^{i\omega_i t}$$

(=S(q, ω) とおく)

$$\text{ただし、} \delta \varepsilon_{si}(q, t) = \mathbf{n}_s \cdot (\delta \varepsilon(q, t)) : \mathbf{n}_i$$

S(q, ω) は誘電率ゆらぎの時間相関関数のフーリエ変換であるので、散乱光のパワースペクトルは、「誘電率ゆらぎの時間相関関数のフーリエ変換」である。

注意：今みている“ゆらぎ”は $\omega \equiv \omega_i - \omega_s$ の時間スケールである

6.4. 等方的媒質による散乱

誘電率ゆらぎ S(q, ω) が等方的媒質でおきている場合を考える。誘電率ゆらぎの原因として、

密度と温度が熱力学的に揺らぐ場合を考える。このとき、媒質は等方的であるとする。

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{si}(q,t) &= \mathbf{n}_s \cdot (\delta\varepsilon(q,t) : \mathbf{n}_i) \\ &= (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i) \delta\varepsilon(q,t)\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon(q,t) = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T \delta\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_\rho \delta T$$

密度ゆらぎ 温度ゆらぎ

以下、第2項の温度ゆらぎは小さいとする。

$$S(q,\omega) = (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \delta\rho^*(q,t) \delta\rho(q,0) \rangle e^{i\omega t}$$

空間フーリエ変換

$$\langle \delta\rho^*(q,t) \delta\rho(q,0) \rangle = V \int d^3r e^{-iqr} \langle \delta\rho^*(r,t) \delta\rho(r,0) \rangle$$

密度ゆらぎの時間空間相関関数

$$S(q,\omega) = (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T^2 V \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{i(\omega t - qr)} \langle \delta\rho^*(q,t) \delta\rho(q,0) \rangle$$

動的構造因子 $S(q,\omega)$

$$= (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T^2 V S(q,\omega)$$

構造因子

$$S(q) = \int \frac{d\omega}{2\pi} S(q,\omega)$$

一般的に、構造因子がゆらぎの大きさをあらわす

$$\int \varphi_w dw = \langle x^2 \rangle \quad \varphi_w ; \text{時間相関関数}$$

以上をまとめて、パワースペクトルが得られる。

$$I_s(q,\omega_s) = \frac{I_0 V}{8\pi^2 R^2} \left(\frac{\omega_i^5}{c^5} \right) (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T^2 S(q,\omega)$$

- 光散乱実験から相関関数のフーリエ変換を導くこともできる。