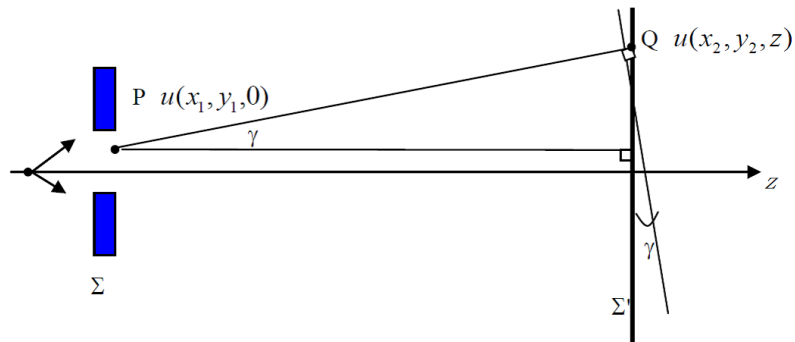


## 5 光の回折

回折とは光が物体を回り込んで伝播する現象である。ここでは、ある軸上を光が伝搬する場合を考え、小さい開口を通過する際にどのようにその伝搬が変化するかを考えよう。そのために、近軸近似を考える。

### 5.1 近軸近似



ホイヘンスの原理を用いてスクリーン上の  $Q$  点での電場を考える。ここでのホイヘンスの原理は4章でやったようなフェルマーの原理から導かれた限定的なものではなく、波動としての性質を表すものである。基本的には点光源からの双極子放射を球面で近似した発想である。

開口  $\Sigma$  中の点  $P$  から発生する2次波の  $\Sigma'$  平面への投影成分は

$$u(x_2, y_2, z_2) \approx \alpha \frac{-ik_0 r}{r} \cos \gamma u(x_1, y_1, 0). \quad (5.1)$$

ここに  $\alpha = i/\lambda_0$  である<sup>7</sup>。  $\Sigma'$  面上での光電場はすべての  $P$  点からの2次波

<sup>7</sup> $\alpha$  の決定

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\pi}{\alpha} \quad (5.2)$$

開口  $\Sigma$  を無くして、平面波かつ  $x_2 = y_2 = 0$  の点を見ると、

$$u(x_1, y_1) = 1 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} u(0, 0, z) &= \frac{\alpha e^{-ik_0 z}}{z} \iint e^{-\frac{ik_0}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} dx_1 dy_1 \\ &= \frac{\alpha e^{-ik_0 z}}{z} \left( \sqrt{\frac{2z\pi}{ik_0}} \right)^2 \\ &= \alpha \frac{2\pi}{ik_0} e^{-ik_0 z} = \frac{\lambda_0}{i} \alpha e^{-ik_0 z} \end{aligned} \quad (5.4)$$

これより、 $\alpha = i/\lambda_0$ 。

の重ね合わせであるから、

$$u(x_2, y_2, z) = \frac{i}{\lambda_0} \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \cos \gamma dx_1 dy_1 \quad (5.5)$$

と表せる。ここで、距離  $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2}$  である。

$PQ$  が  $z$  軸とほぼ平行な場合、すなわち  $\gamma \approx 0$ ,  $\cos \gamma \approx 1$  の場合を考える (近軸近似)。この時、(5.5) 式右辺の  $1/r$  の項は  $1/z$  と近似できる。しかし、 $e^{-ik_0 r}$  の中の  $r$  に関しては、

$$e^{-ik_0 r} = e^{-ik_0 z} e^{-i2\pi(r-z)/\lambda_0} \quad (5.6)$$

となるため、今考えている典型的な周波数と長さのスケール ( $O(\lambda_0) \sim 1\mu\text{m}$ ,  $O(r) \sim O(z) \sim \text{m}$ ) では  $|(r-z)/\lambda_0| \gg 1$  と成り、 $r \approx z$  の近似をせずにきちんと扱わないといけない。

このため、 $e^{-ik_0 r}$  の中の  $r$  に関しては、

$$\begin{aligned} r &= z \sqrt{1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{z}\right)^2} \\ &= z + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2z} + \dots \\ &= z + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z} - \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1}{z} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z} + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

の第4項までをとる事とする。

この時、(5.5) 式は、

$$\begin{aligned} u(x_2, y_2, z) &= \\ &A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{ik_0(x_2 x_1 + y_2 y_1)/z} e^{-ik_0(x_1^2 + y_1^2)/2z} dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

となる。ただし、

$$A_0(x_2, y_2, 0) = \frac{ie^{ik_0 z}}{\lambda_0 z} e^{-ik_0(x_2^2 + y_2^2)/2z} \quad (5.9)$$

である。(5.8) 式を回折のフレネル (Fresnel) 近似と呼ぶ。

#### ● フラウンホーファー (Fraunhofer) 近似

(5.7) 式の右辺第4項が十分小さい場合には、(5.8) 式は以下のように変形される。

$$u(x_2, y_2, z) = A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{ik_0(x_2 x_1 + y_2 y_1)/z} dx_1 dy_1 \quad (5.10)$$

これを回折の**フラウンホーファー近似**と呼ぶ。

#### フラウンホーファー近似の条件

(5.7) 式の右辺第 4 項が十分小さいという条件を以下でもう少し考えてみる。

開口  $\Sigma$  の  $x, y$  座標の最大値を  $x_{1\max}, y_{1\max}$  とおくと、

$$\frac{k_0}{2z}(x_{1\max}^2 + y_{1\max}^2) \ll 1. \quad (5.11)$$

開口  $\Sigma$  を円とすると、その半径を  $D$  として、

$$x_{1\max}^2 + y_{1\max}^2 = 2D^2 \quad (5.12)$$

なので、条件式 (5.11) は、

$$z \gg \frac{k_0}{2} 2D^2 = \frac{2A}{\lambda_0} \quad (5.13)$$

$A := \pi D^2$  (開口  $\Sigma$  の面積)

となる。上式 (5.13) より分かる様にフラウンホーファー近似が成り立つのは開口  $\Sigma$  から測定位置までの距離  $z$  が開口の面積  $A$  を光の波長  $\lambda_0$  で割ったものに比べて十分大きいときである。

例. 開口が 1mm,  $\lambda_0 = 1\mu\text{m}$  の場合、 $z \gg 10^{-6}\text{m}^2/10^{-6}\text{m} \sim 1\text{m}$  であればフラウンホーファー近似が使える。

#### フラウンホーファー回折における孔内電場と回折光の関係

(5.10) 式は、 $f_x = -k_0 x_2/z$ ,  $f_y = -k_0 y_2/z$  とおくと、

$$u(x_2, y_2, z) = A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \quad (5.14)$$

と成るが、これは、**フラウンホーファー近似の成り立つ領域では  $x_2, y_2$  面の電場分布  $u(x_2, y_2)$  は開口内の電場分布  $u(x_1, y_1)$  のフーリエ変換と成っている事**を意味する。 $f_x, f_y$  を空間 (フーリエ) 周波数と呼ぶ。

## 5.2 フラウンホーファー回折の具体例

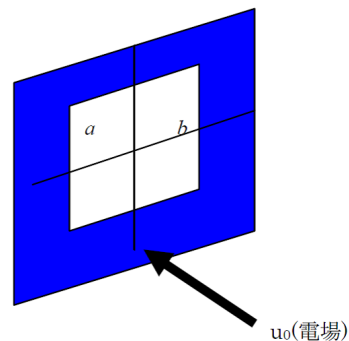
単一開口の場合を考える。

- 方形 (大きさ  $a \times b$ ) の場合

方形中の電磁場分布は一様  $u(x_1, y_1, 0) = u_0$  とすると

(5.14) 式は、

$$\begin{aligned} u(x_2, y_2, z) &= A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \\ &= A_0(x_2, y_2, z) u_0 a b \operatorname{sinc}\left(\frac{ax_2}{\lambda_0 z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{by_2}{\lambda_0 z}\right) \end{aligned} \quad (5.15)$$



ただし、 $\operatorname{sinc} X := \sin(\pi X)/\pi X$  である。  
これより、強度分布は

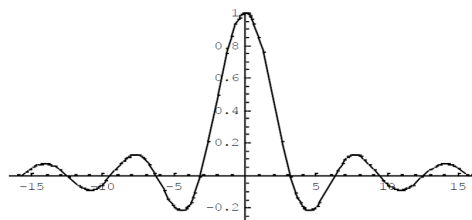
$$\begin{aligned} I(x_2, y_2, z) &= |u(x_2, y_2, 0)|^2 \\ &= I_0 \operatorname{sinc}^2 X \operatorname{sinc}^2 Y \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$X := \frac{ax_2}{\lambda_0 z}, \quad Y := \frac{by_2}{\lambda_0 z} \quad (5.17)$$

となる。

(発展)

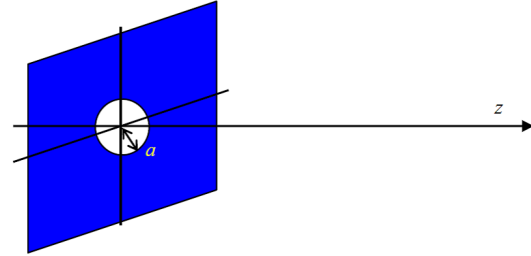
$\sin x/x$  のグラフは右のようになることから  $x_2 - y_2$  面上には四角い枠の像が連続的に現れる。2次元面で書くとどうなるか考えてみよう。



● 円形の場合

極座標

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \theta_1, & y_1 &= r_1 \sin \theta_1, \\ x_2 &= r_2 \cos \theta_2, & y_2 &= r_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$



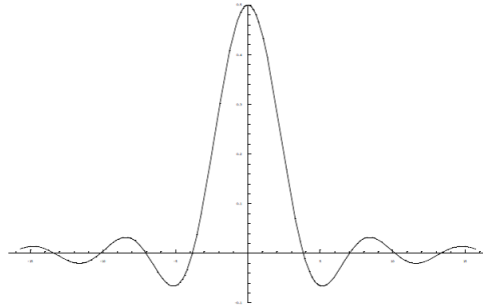
で考えると (5.14) 式は、

$$\begin{aligned} u(r_2, \theta_2, z) &= A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \\ &= A_0(x_2, y_2, z) u_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-ik_0 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)/z} r_1 dr_1 d\theta_1 \\ &= A_0(x_2, y_2, z) u_0 (\pi a)^2 \frac{2J_1(k_0 a r_2/z)}{k_0 a r_2/z} \end{aligned} \quad (5.18)$$

ただし、 $J_1$  は 1 次のベッセル関数である。また、方形中の電磁場分布は一様  $u(x_1, y_1, 0) = u_0$  と仮定している。

(発展)

$J_1(x)/x$  のグラフは下記のようなことから  $x_2 - y_2$  面上には四角い枠の像が連続的に現れる。2次元面で書くとどうなるか考えてみよう。



問題

(5.18) 式が成り立つことを示せ。

Hint: ヤコビ・ポアンカレの展開式

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(z) i^m e^{im\theta} \quad (5.19)$$

と、

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (5.20)$$

を積分形であらわした

$$x^n J_n(x) = \int x^n J_{n-1}(x) dx \quad (5.21)$$

を用いよ。

## 6. 光散乱

## 6.1 振動する局所的な湧き出しによる場と放射

$$\text{Maxwell 方程式} \quad \left[ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$\rho$ 、 $\mathbf{j}$  は  $x=0$  の近傍に局所的に存在するものとする。

調和関数的な時間変化の湧き出しを考える。

$$\left[ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \end{array} \right.$$

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 、スカラーポテンシャル  $\phi(\mathbf{x}, t)$

$$\left[ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{array} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right.$$

$$\left( \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \\ t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c^2} \end{array} \right. \quad \text{遅延ポテンシャル}$$

十分遠方で  $\rho = 0$ 、 $\mathbf{j} = 0$  では、

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k\mu_0} Z_0 \nabla \times \mathbf{B} = i \frac{c}{k} \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{ただし } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

遅延ポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3 x' \int dt \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right)$$

と書き換えることが出来る。時間積分を実行すると、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3 x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$

遠方領域  $kr \gg 1$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' \quad \mathbf{n} \text{ は } \mathbf{x} \text{ 方向の単位ベクトル}$$

このとき⑩は

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' && r \text{ のみに依存する球面波} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^n \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' \end{aligned}$$

$n=0$  のみを採用する (双極子近似)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' \\ \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' &= -\int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}) d^3x' \\ &= -i\omega \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= -i\omega \mathbf{P} \end{aligned}$$

この場合

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= -\frac{i\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{P} \frac{e^{ikr}}{r} && \text{球面波} \\ \left( \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{k^2}{4\pi} Z_0 (\mathbf{n} \times \mathbf{P}) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \mathbf{E} &= Z_0 \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{n} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} \end{aligned} \right. && Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \text{ 真空のインピーダンス} \end{aligned}$$

振動する双極子モーメント  $\mathbf{P}$  が単位時間、単位立体角あたりに放射するエネルギーの時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ r^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right] \\ &= \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 |\mathbf{P}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad \text{双極子放射}$$

## 6.2 長波長における散乱

### A. 小散乱体面に誘導される双極子による散乱

外場  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{J}_{\text{分極}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{J}_{\text{分極}}$  により電磁波が放射

$$\text{入射} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}_{in} &= \mathbf{e}_0 E_0 e^{ikn_0 \cdot \mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_{in} &= \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_{in} / Z_0 \end{aligned} \right. \quad \text{放射} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}_{sc} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [(\mathbf{n} \times \mathbf{P}) \times \mathbf{n}] \\ \mathbf{H}_{sc} &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{sc} / Z_0 \end{aligned} \right.$$

(外部の比誘電率は 1 とする)

偏り  $\mathbf{e}_0$  で方向  $\mathbf{n}_0$  の単位入射エネルギー流速あたりに、偏り  $\mathbf{e}$  で方向  $\mathbf{n}$  に単位立体角、単位時間あたりに放出されるエネルギー (微分散乱断面積) は

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{e}; \mathbf{n}_0, \mathbf{e}_0) = \frac{\gamma^2 \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_{sc}|^2}{\frac{1}{2Z_0} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_{in}|^2} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{P}|^2$$

$$\left( \begin{array}{l} \omega = ck : \omega^4 \text{依存性} \\ |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{P}| : \text{偏光依存性} \end{array} \right) \quad \left( \because |\mathbf{S}| = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}|^2 \right)$$

B. 小誘電体による散乱

$$\begin{aligned} \sigma_{pol} &= 3\epsilon_0 \left( \frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) |\mathbf{E}_0| \cos\theta \\ &= 3\epsilon_0 \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) |\mathbf{E}_0| \cos\theta \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} a^3 \mathbf{E}_0$$

この場合

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \propto k^4 a^6 \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2$$

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{//}}{\partial \Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|^2 \cos^2\theta \quad \leftarrow \mathbf{e}_0^{(1)} \text{での入射} \\ \frac{\partial \sigma_{\perp}}{\partial \Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|^2 \quad \leftarrow \mathbf{e}_0^{(2)} \text{での入射} \end{array} \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で } \frac{\partial \sigma_{\perp}}{\partial \Omega} = 0$$

例. 青空は偏光している。どの向きに偏光しているか? 上の議論をもちいて述べよ。

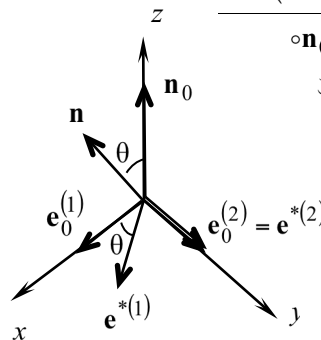
(ヒント: 太陽との位置関係を考える。青空は空気中の窒素や酸素分子による散乱)

$\mathbf{e}_0$  は入射電磁場  $\mathbf{E}_0$  の単位方向ベクトル

$$\mathbf{e}^* = (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_0) \times \mathbf{n}$$

○  $\mathbf{n}_0$  と  $\mathbf{n}$  で張る面を 散乱面 と呼ぶ

この場合は xz 面



$$\mathbf{e}^* = (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_0) \times \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_0 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_0) \mathbf{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^{*(1)} = \mathbf{e}_0^{(1)} - \mathbf{n} \sin\theta \\ \mathbf{e}^{*(2)} = \mathbf{e}_0^{(2)} \end{cases}$$



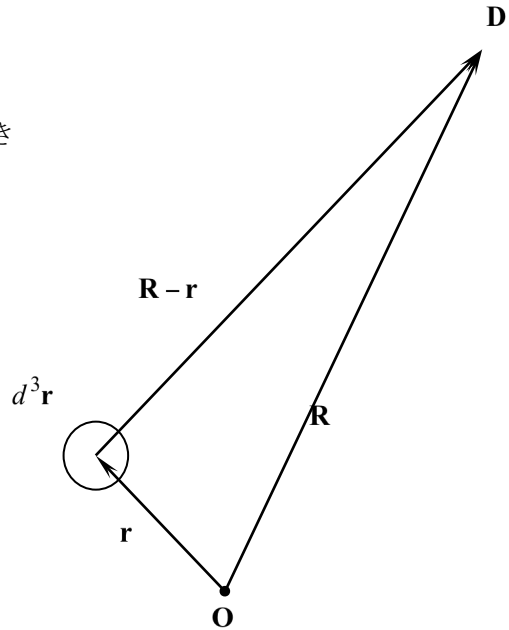
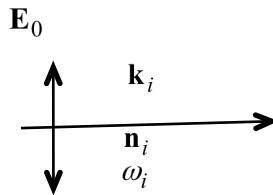
6.3. 誘電率の揺らぎによる電磁波の散乱

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{リアルな電荷、電流なし。誘導電流（誘導電荷）のみを考慮する。}$$

この方程式は入射波と散乱光の和について成立するべき

$$\begin{array}{l} \text{入射 } \mathbf{E}_i \quad \mathbf{D}_i \quad \mathbf{H}_i \quad \mathbf{B}_i \\ \text{散乱 } \mathbf{E}_s \quad \mathbf{D}_s \quad \mathbf{H}_s \quad \mathbf{B}_s \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_s \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_s \end{cases}$$



$E_s$  等は小さいと考えて逐次近似的に

$E_s$  等の満たすべき方程式を導く。

0th order

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}_i = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_i = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}_i = \frac{\partial \mathbf{D}_i}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}_i = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}_i \\ \mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{H}_i \\ \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \text{ より}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_i}{\partial t^2}$$

$$\therefore \Delta \mathbf{E}_i - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_i}{\partial t^2} = 0 \quad \left( k_i = \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} \omega_i \right)$$

この物体の誘電率  $\epsilon$  は空間的にも時間的にも揺らいでいるものとする。

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 (\epsilon \mathbf{I} + \delta \epsilon(\mathbf{r}, t))$$

$\mathbf{I}$ : 単位テンソル

$$\langle \epsilon(\mathbf{r}, t) \rangle = \epsilon_0 \epsilon \quad \langle \delta \epsilon(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$$

**1th order**

平面波の入射に関して、誘電率の揺らぎを摂動として1次まで取り込んで計算する  
(ボルン近似)

$$\varepsilon = \varepsilon + \delta\varepsilon$$

によって  $E_s$  が生成される。  $E_s$  は  $\delta$  の order

全体の場についても同様に

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}$$

が成立し、  $E_i$  の成分に関しては等式が成立するので

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_s}{\partial t^2}$$

も成立する。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)) (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_i + \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_s + \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i + \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_s}{\mathbf{D}_i} \quad \frac{\delta^2 \text{のorder}}{\delta^2 \text{のorder}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_s = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_s + \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D}_s - \frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon} \mathbf{E}_i \quad \dots (\star)$$

$$\Delta \mathbf{D}_s - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}_s}{\partial t^2} = -\nabla \times \nabla \times \{ \varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i \}$$

ヘルツベクトル(Hertz vector)

$$\mathbf{D}_s = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}$$

$$\Delta \mathbf{\Pi} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i}{\text{湧き出し}}$$

この式は以前に見たことがある。湧き出しがある場合のベクトルポテンシャルが満たすしきだ！故に

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}$$

$$t' = t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}|$$

これを用いて

$$\mathbf{D}_s(\mathbf{R}, t) = \nabla_R \times \nabla_R \times \left[ \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon_0 \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r} \right]$$

電場  $\mathbf{E}_s$  はこの  $\mathbf{D}_s$  からの成分と (☆) における右辺第 2 項からの寄与がある。散乱体に近い

場合は第 2 項は有効だが、 $\mathbf{R}$  がより十分に離れていけば 0 だ。

そのような離れた場所での「散乱場」を考える。ここで、 $\mathbf{n}_i$  は入射偏光の単位ベクトルである。

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t) = \nabla_R \times \nabla_R \times \left[ \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r} \right]$$

$$= \nabla_R \times \nabla_R \times \left[ \frac{E_0}{4\pi\varepsilon} \int \frac{(\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t') : \mathbf{n}_i)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega_i t'} d^3\mathbf{r} \right]$$

揺らぎテンソル  $\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t')$  の時間フーリエ変換を考える

$$\frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t')}{\text{テンソル}} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{\delta\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\text{テンソル}} e^{i\omega t'}$$

さらに遠方近似

$$\left( \begin{array}{l} |\mathbf{R} - \mathbf{r}| = |\mathbf{R}| - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}_s \quad \hat{\mathbf{k}}_s = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \\ t' = t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{k}}_s \end{array} \right)$$

を行うと、散乱波

$$\left( \begin{array}{l} \omega_s = \omega_i - \omega \\ \mathbf{k}_s = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} (\omega_i - \omega) \hat{\mathbf{k}}_s = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} \omega_s \hat{\mathbf{k}}_s \quad \hat{\mathbf{k}}_s = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \\ \mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s \end{array} \right)$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t) = \frac{E_0}{4\pi\epsilon} e^{-i\omega_i t} \nabla_R \times \nabla_R \times \left[ \int \frac{d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} e^{i\left(\mathbf{k}_i - \frac{\sqrt{\epsilon}(\omega_i - \omega)}{\omega_s} \hat{\mathbf{k}}_s\right) \cdot \mathbf{r}} \times \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} (\delta\epsilon(\mathbf{r}, \omega) : \mathbf{n}_i) e^{i\frac{\sqrt{\epsilon}}{c}(\omega_i - \omega) \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{R}} \right]$$

$$= \frac{E_0}{4\pi\epsilon} e^{-i\omega_i t} \nabla_R \times \nabla_R \times \left[ e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R}} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} (\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i) \right]$$

ここで、指数関数の肩で  $(\omega_i - \omega)$  となった場合に、 $\omega$  は小さいと考えて  $\omega$  積分の外に  $\omega_s$  と取り出した。さらに、遠方近似をもう一度おこなう。すなわち、

$$\left[ \begin{array}{l} |\mathbf{R}-\mathbf{r}|^{-1} \rightarrow \mathbf{R}^{-1} \\ \nabla_R \times \rightarrow i\mathbf{k}_s \times \end{array} \right. \quad \text{と置き換える。}$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}, t) = \frac{-E_0}{4\pi\epsilon} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R} - \omega_i t)} \mathbf{k}_s \times \mathbf{k}_s \times \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} (\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i)$$

ここで、 $\mathbf{n}_s$  を  $\mathbf{E}_s$  方向の単位ベクトルとする。すなわち、

$$\left[ \begin{array}{l} \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{k}_s = 0 \\ \mathbf{E}_s = E_0 \mathbf{n}_s \end{array} \right. \quad \text{とすると、}$$

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R}, t) = \frac{-E_0}{4\pi\epsilon R} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R} - \omega_i t)} \mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{k}_s \times \mathbf{k}_s \times (\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i))$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$E_s^0(\mathbf{R}, t) = \frac{E_0 \omega_s^2}{4\pi\epsilon R} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R} - \omega_i t)} \delta\epsilon_{si}(q, t)$$

ここで

$$\delta\epsilon_{si}(q, t) = \mathbf{n}_s \cdot (\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i)$$

は揺らぎテンソルである。①、②から、いくつかのことがわかる。

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R}, t) \propto \frac{e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R}}}{R} \quad \rightarrow \quad \text{球面波}$$

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R}, t) \propto E_0 \delta\epsilon_{si}(q, t) \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{揺らぎに比例} \\ \bullet \text{入射振幅に比例} \\ \bullet \langle \mathbf{E}_0^s(\mathbf{R}, t) \rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{E}_s^0(\mathbf{R}, t) \propto e^{-i\omega_i t} \quad \rightarrow \quad \text{入射光の振動数で振動}$$

### 異方性がある場合への拡張

ここまで  $\delta\epsilon$  はスカラーとして扱ってきたが實際上、物質に異方性があるとテンソル量にな

り、これを取り入れる。

$$\sum_j \frac{\delta \varepsilon_{ij}}{\begin{matrix} 3 \times 3 \\ \text{行列} \end{matrix}} E_j(\mathbf{r}, t) \rightarrow (\delta \varepsilon(\mathbf{r}, t) : \mathbf{n}_i) \quad \text{とかく。}$$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = E_0 \mathbf{n}_i e^{i(k_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}$$

### パワースペクトル

$$I_s(q, \omega_s) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t) e^{-i\omega_s t} dt$$

$$C(t) = \langle \mathbf{E}_s^*(t - t_0) \mathbf{E}(t_0) \rangle_t - \langle \mathbf{E}_s \rangle^2$$

$$= \langle \mathbf{E}_s^*(t) \mathbf{E}(0) \rangle \quad \text{電場時間相関関数}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}_s^*(t+s) \mathbf{E}(s) ds \quad \rightarrow e^{i\omega_i(t+s)} e^{i\omega_i s} \rightarrow e^{i\omega_i t}$$

s の部分が消えるので積分の外に出る。

$$\omega \equiv \omega_i - \omega_s \quad (\text{入射光と散乱光の振動数差})$$

とすると

$$C(t) = |\mathbf{E}_0|^2 \left( \frac{k_s^2}{4\pi \varepsilon R} \right)^2 \langle \delta \varepsilon_{si}^*(q, t) \delta \varepsilon_{si}(q, 0) \rangle e^{i\omega_i t}$$

$$I_s(q, \omega_s) = \frac{I_0}{8\pi^2 R^2} \left( \frac{\omega_i^4}{c^5} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \delta \varepsilon_{si}^*(q, t) \delta \varepsilon_{si}(q, 0) \rangle e^{i\omega_i t}$$

(=S(q, ω) とおく)

$$\text{ただし、} \delta \varepsilon_{si}(q, t) = \mathbf{n}_s \cdot (\delta \varepsilon(q, t)) : \mathbf{n}_i$$

S(q, ω) は誘電率ゆらぎの時間相関関数のフーリエ変換であるので、散乱光のパワースペクトルは、「誘電率ゆらぎの時間相関関数のフーリエ変換」である。

注意 : 今みている “ゆらぎ” は  $\omega \equiv \omega_i - \omega_s$  の時間スケールである

### 6.4. 等方的媒質による散乱

誘電率ゆらぎ S(q, ω) が等方的媒質でおきている場合を考える。誘電率ゆらぎの原因として、

密度と温度が熱力学的に揺らぐ場合を考える。このとき、媒質は等方的であるとする。

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{si}(q, t) &= \mathbf{n}_s \cdot (\delta\varepsilon(q, t) : \mathbf{n}_i) \\ &= (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i) \delta\varepsilon(q, t)\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon(q, t) = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \delta\rho + \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\rho \delta T$$

密度ゆらぎ      温度ゆらぎ

以下、第2項の温度ゆらぎは小さいとする。

$$S(q, \omega) = (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \delta\rho^*(q, t) \delta\rho(q, 0) \rangle e^{i\omega t}$$

空間フーリエ変換

$$\langle \delta\rho^*(q, t) \delta\rho(q, 0) \rangle = V \int d^3r e^{-iqr} \langle \delta\rho^*(r, t) \delta\rho(r, 0) \rangle$$

密度ゆらぎの時間空間相関関数

$$S(q, \omega) = (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 V \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{i(\omega t - qr)} \langle \delta\rho^*(q, t) \delta\rho(q, 0) \rangle$$

動的構造因子  $S(q, \omega)$

$$= (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 V S(q, \omega)$$

構造因子

$$S(q) = \int \frac{d\omega}{2\pi} S(q, \omega)$$

一般的に、構造因子がゆらぎの大きさをあらわす

$$\int \varphi_w dw = \langle x^2 \rangle \quad \varphi_w ; \text{時間相関関数}$$

以上をまとめて、パワースペクトルが得られる。

$$I_s(q, \omega_s) = \frac{I_0 V}{8\pi^2 R^2} \left( \frac{\omega_i^5}{c^5} \right) (\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_i)^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 S(q, \omega)$$

- 光散乱実験から相関関数のフーリエ変換を導くこともできる。