

2.6 誘電関数の現象論

2.6.1 ローレンツ振動子モデルと緩和則

外部電場によって電子が応答することによる誘電関数のモデルを考える。具体的には、半導体や絶縁体の光吸収をどのように記述するかという問題である。厳密には、量子力学が必要。束縛電子の光遷移を固有振動数の振動子として古典的にモデル化する。

$$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0 x) = -e\mathbf{E} \quad (2.118)$$

$e^{-i\omega t}$ で振動するフーリエ成分に対して次の強制振動解が得られる。

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi(\omega)\mathbf{E} = -e\mathbf{x} = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (2.119)$$

ここで、 Z 個の電子を持つ分子が単位体積当たりに N 個あるとすると、

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (2.120)$$

がえられる。これをローレンツ振動子モデルとよぶ。ここで、 Z 個の電子すべてに同じ ω を与えるのではなく ω_j 、 γ_j のものが f_j 個あると考えている。この f_j を振動子強度とよぶ。 f_j には総和則 $\sum_j f_j = Z$ が成り立つ。

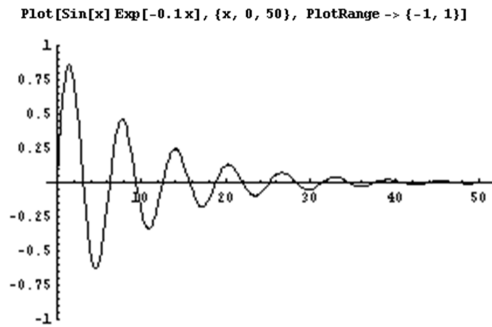
(2.120) 式は高周波極限 ($\omega \gg \omega_j, \gamma$) では自由プラズマの式

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} &= 1 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \\ &\sim 1 + \frac{Ne^2}{m\omega^2} \sum_j f_j \sim 1 + \frac{NZe^2}{m\omega^2} \end{aligned} \quad (2.121)$$

2.6.2 指数関数的な応答をする双極子モーメント

ローレンツモデルの意味を考えるため、応答関数として、図に示すような $f(t) = A \sin(\omega_0 t) e^{-\gamma t}$ を考えよう。いわゆる減衰振動の応答である¹。ここに A は定数である。

¹例えば、鐘を叩いた後の残響を考えれば良い。



この場合、感受率はフーリエ変換する事により容易に求まる。

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \int_0^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{A}{2} \left\{ \frac{1}{\omega + \omega_0 + i\gamma} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} &= A \frac{-\omega_0}{(\omega + i\gamma)^2 - \omega_0^2} \\ &= A \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \end{aligned} \quad (2.123)$$

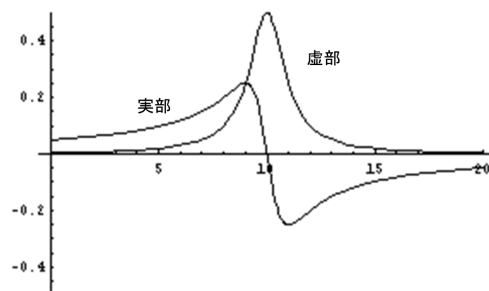
ここで、最後の变形では $\gamma \ll \omega_0$ をもちいて、分母の γ^2 の項を落としている。

(2.123) はローレンツモデルの感受率 (2.119) と同型である。共鳴に近い周波数 ($\omega \neq \omega_0$) では (2.122) 式右辺第 2 項が主に成り、

$$\chi'(\omega) = -\frac{A}{2} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (2.124)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{A}{2} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (2.125)$$

が得られる。下に共鳴周波数近傍の実部、虚部のグラフを示す。虚数部は共鳴周波数 にピークを持つローレンツ型とよばれる曲線になっている。それに対して、実部は微分波形で、低周波側が大きくなる。その増大分を以下で考える。



$\omega \rightarrow 0$ 、 $\omega \rightarrow \infty$ の極限ではそれぞれ、

$$\chi(0) = A \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \gamma^2} \neq \frac{A}{\omega_0} \quad (2.126)$$

$$\chi(\infty) = 0 \quad (2.127)$$

となり、特に振動数がゼロに近いときは虚数部は消失するが、実部は残る。これは静的な誘電率にはすべての共鳴の情報が含まれている事を意味する。

2.6.3 デバイ振動子モデル

μ をダイポールモーメントとし、自由にその向きを回転できるものとする。外場が無いときには、平均のモーメント $m = \langle \mu \rangle$ は明らかにゼロである。外場をかけるとその向きに整列するので、巨視的な分極が現れる。単位体積当たり N 個の分子を考え、 x 方向の電場 E をかけたとしよう。簡単のために、問題を 1 次元で考えよう。電場の方向の分子数を N_1 、反対方向を N_2 とすると、平均モーメントの時間変化は

$$m = \mu \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= \frac{\mu}{N} \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} - \frac{\partial N_2}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\mu}{N} \{ (-P_{21}N_1 + P_{12}N_2) - (P_{21}N_1 - P_{12}N_2) \} \\ &= -(P_{21} + P_{12})m - (P_{21} - P_{12})\mu \end{aligned} \quad (2.129)$$

となる。ここに、 P_{21} 、 P_{12} は統計力学的な遷移確率であり、下式であたえられる。

$$P_{21} = \frac{\omega_0}{2\pi} e^{(\Delta - \mu E)/kT} = P_0 e^{-\frac{\mu E}{kT}} \quad (2.130)$$

$$P_{12} = P_0 e^{\frac{\mu E}{kT}} \quad (2.131)$$

$$P_0 := \frac{\omega_0}{2\pi} e^{\frac{\Delta}{kT}} \quad (2.132)$$

$\mu E \ll kT$ とすると、 $\exp(\mu E/kT) \cong 1 + \mu E/kT$ より (??) 式は

$$\tau_0 \frac{\partial m}{\partial t} = -m + \frac{\mu^2 E}{kT} \quad (2.133)$$

となる。ただし、 $\tau_0 = \frac{1}{2P_0}$ とおいた。角振動数 ω のフーリエ成分を考え、3次元空間での平均に換算するために x 方向への射影平均 $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/3$ を考えると、最終的に

$$m = \frac{\mu^2}{3kT} \frac{1}{1 - i\omega\tau_0} E \quad (2.134)$$

となる。これより、誘電関数は下記の様に与えられる

$$\epsilon - \epsilon_0 = \frac{\epsilon_0 N \mu^2}{3kT} \frac{1}{1 - i\omega\tau_0}. \quad (2.135)$$

(2.132) 式は、応答関数として $f(t) \propto e^{-t/\tau_0}/\tau_0$ と置いた場合の誘電関数となっている。この応答関数は振動をせずに指数関数的に減衰することから、デバイモデルで記述されるモードはしばしば緩和モードと呼ばれ、水や2次相転移を示す強誘電体で観測される。誘電率の周波数分散を実部、虚部に分けて書くと、

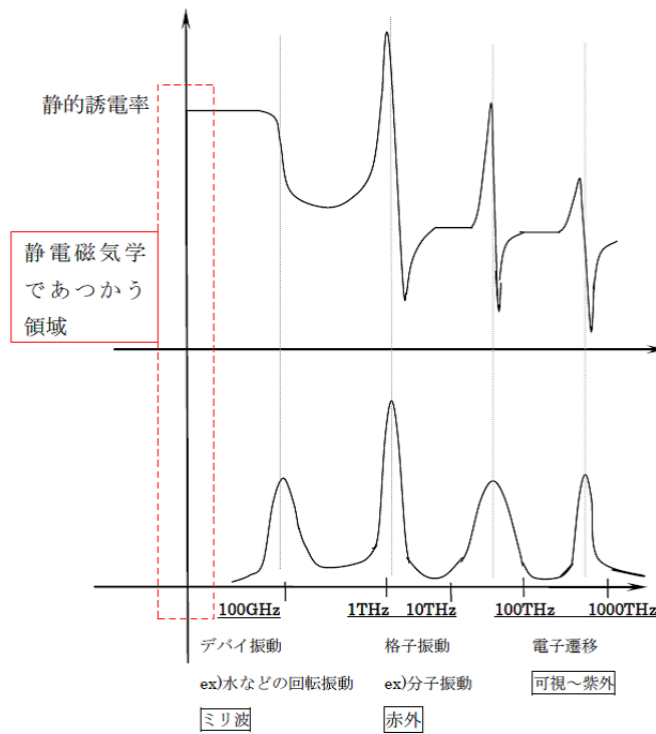
$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.136)$$

$$\epsilon''(\omega) = \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} \omega\tau \quad (2.137)$$

となる。

2.6.4 広い周波数領域の分散

広い周波数領域での分散を概観すると以下の図のようになる（上が実部、下が虚部）



2.6.5 群速度と波束伝搬

物質中の位相速度は $\nu_p = \omega/|k| = c/n$ であたえられたが、この節では波束の伝搬速度（群速度）を考える。

以下で表されるような波束の伝搬を考える

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3k. \quad (2.138)$$

ここで、 $A(\mathbf{k})$ は中心波数 \mathbf{k}_0 に鋭いピークを持つような関数である。このとき、フーリエ変換の性質より、 $u(\mathbf{x}, 0)^2$ 、 $A(\mathbf{k})^2$ のそれぞれの幅を Δx 、 Δk とすると、 $\Delta x \Delta k \geq 1/2$ が成り立つ。

(2.135) 式右辺の指数関数の肩にある \mathbf{k} 、 ω は波動方程式から決定される分散関係 (物質中の電磁場の場合は $k = \tilde{n}(\omega)\omega/c$ (2.86) 式) を満たさなければならないが、そのことを明示的に書き、 $A(\mathbf{k})$ が \mathbf{k}_0 の周りに局在していることを考慮すると、

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} d^3k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}) e^{i\{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - (\omega_0 + \frac{\partial \omega(\mathbf{k}_0)}{\partial \mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))t\}} d^3k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \frac{\partial \omega(\mathbf{k}_0)}{\partial \mathbf{k}} t)} d^3k \times e^{-i(\omega_0 - \frac{\partial \omega(\mathbf{k}_0)}{\partial \mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}_0)t} \\ &= u(\mathbf{x}', 0) e^{-i(\omega_0 - \frac{\partial \omega(\mathbf{k}_0)}{\partial \mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}_0)t} \end{aligned} \quad (2.139)$$

となる。ただし、 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} t$ とした。また、2 個目の等号では $A(\mathbf{k})$ が中心波数 \mathbf{k}_0 のまわりに局在していることを考慮し、 ω を \mathbf{k}_0 のまわりでテイラー展開している ($\omega = \omega_0 + \partial \omega(\mathbf{k}_0)/\partial \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$)。 (2.139) 式より、

$$|u(\mathbf{x}, t)| = \left| u\left(\mathbf{x} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} t, 0\right) \right| = |u(\mathbf{x} - \mathbf{v}_g t, 0)| \quad (2.140)$$

$$\mathbf{v}_g := \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (\text{群速度}) \quad (2.141)$$

となるが、これは (2.138) であらわされる波束が速度 (群速度) \mathbf{v}_g で伝搬することを意味する。

3 物質中の電磁波

3.1 絶縁体中での平面電磁波

2.3.2 節でみたように、**複素感受率** $\tilde{\chi}(\omega)$ は応答関数 $\chi(t)$ の逆フーリエ変換であり、電場 $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ に対する分極 $\mathbf{P}(\omega)$ の線型な応答係数であった。更に、2.3.3 節でみたように複素屈折率を $\tilde{n}^2(\omega)$ と定義すると、

ヘルムホルツの波動方程式

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\omega) + \frac{\omega^2 \tilde{n}^2(\omega)}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) = 0 \quad (3.1)$$

が得られた。また、 \tilde{n} が実数の場合を考えると、 $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ として x 方向に伝搬する平面波 $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ を考えることができ、

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 = \frac{\omega^2 \tilde{n}^2}{c^2} \quad (3.2)$$

という分散関係が得られた。

\tilde{n} が実数の場合に波数 \mathbf{k} 、周波数 ω の平面伝搬波の電磁場を具体的に書くと

$$\mathbf{E}^{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad (3.4)$$

となる。ただし、波数 \mathbf{k} と周波数 ω には分散関係 (3.2) が課せられている。また、一般の伝搬波はこれらの平面波の重ね合わせで表される。

ここで電場、磁場は観測量なので実数であり、実際には上記のような複素表現をしていても実部のみが物理的の意味を持っている。

真空中の場合と同様、(等方な)誘電体中でも平面波の伝搬方向 \mathbf{k} と電場及び磁場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$ は直交している。

実際、 \mathbf{k} 方向の単位ベクトルを \mathbf{n} とすると ($\mathbf{k} = k\mathbf{n}$)、絶縁体中では $\rho = 0$ なので、ガウスの法則 $\text{div}\mathbf{E} = 0$ より、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (3.5)$$

また、ファラデーの法則 $\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ より、

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega), \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k}{\omega} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.6)$$

(3.6) 式と $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ との内積をとると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (3.7)$$

と成り、 \mathbf{n} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} は互いに直交している事が解る。

3.2 直線偏りと円偏り：ジョーンズベクトルとストークスパラメーター

電磁場の偏光ベクトルの理解とその操作に関する数学的取り扱いが実際の応用では頻りに現れるが、あまり教科書できちんと記述されていない。ここでは、偏光状態の記述について述べる。

電磁波の伝搬方向 \mathbf{k} と垂直な面に互いに直交する単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を選ぶと電場ベクトルは

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (3.8)$$

とかける。ここで E_1, E_2 は複素数であり、これらの位相により電磁波の異なる偏り成分 (\mathbf{e}_1 方向と \mathbf{e}_2 方向) の間の位相差が表現される。

(1). E_1 と E_2 が同位相の場合を「直線偏光」と呼ぶ。

(3.8) 式で位相をゼロとおけば、 E_1, E_2 は実数で、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (3.9)$$

(2). E_1 と E_2 が異なる位相を持つ場合「楕円偏り」とよぶ

最も簡単な場合は $E = E_1 = E_2$ 、 $\arg(E_1/E_2) = \pm\pi/2$ の時で、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow \text{Re}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E(\mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mp \mathbf{e}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \quad (3.11)$$

となり、円偏光となる。(3.10) 及 (3.11) より

$$\mathbf{e}^+ := \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 \quad (3.12)$$

$$\mathbf{e}^- := \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2 \quad (3.13)$$

とすると \mathbf{e}^+ が右円偏り (時計回り)、 \mathbf{e}^- が左円偏り (反時計回り) をあらわす事が解る。 $\mathbf{e}^+, \mathbf{e}^-$ は明らかに 1 次独立なので $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の代わりに $\mathbf{e}^+, \mathbf{e}^-$ を電場ベクトルの方向をあらわす基底にとることも出来る。このため、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E^+ \mathbf{e}^+ + E^- \mathbf{e}^-) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (3.14)$$

ともかける。

(3). E^+ と E^- が同位相の場合

時間原点を適当に選びなおす事により $E^+, -$ とともに実数に出来るが、

$$E^+ \mathbf{e}^+ + E^- \mathbf{e}^- = (E^+ + E^-) \mathbf{e}_1 + i(E^+ - E^-) \mathbf{e}_2 \quad (3.15)$$

なので、これは \mathbf{e}_1 軸方向の長さが $E^+ + E^-$ 、 \mathbf{e}_2 軸方向の長さが $E^+ - E^-$ の「楕円偏り」をあらわす。

(4). E^+ と E^- の位相が同じで絶対値も等しい場合

(3.15) 式で右辺第 2 項が消えるので「直線偏り」となる。

3.2.1 ジョーンズベクトル —ベクトルと行列による偏光の記述—

電場ベクトルが複素数 E_x, E_y を用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (3.16)$$

とあらわされるとき、ジョーンズベクトル \mathbf{J} を以下の様に定義する

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

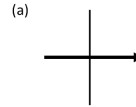
上の定義よりわかる様に、ジョーンズベクトルは一般に複素ベクトルである。また、

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* = E_{1x} E_{2x}^* + E_{1y} E_{2y}^* = 0 \quad (3.18)$$

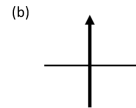
が満たされるとき \mathbf{J}_1 と \mathbf{J}_2 は直交する、という。

例. 基底ベクトルの例

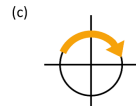
(a) $\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: x 方向の直線偏光



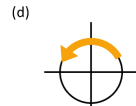
(b) $\mathbf{J}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: y 方向の直線偏光



(c) $\mathbf{J}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 右回り円偏光



(d) $\mathbf{J}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ 左回り円偏光



任意のジョーンズベクトルは \mathbf{J}_x と \mathbf{J}_y 或いは \mathbf{J}_r と \mathbf{J}_l の組で記述できる。

$$\mathbf{J} = \alpha_x \mathbf{J}_x + \alpha_y \mathbf{J}_y = \alpha_r \mathbf{J}_r + \alpha_l \mathbf{J}_l \quad (3.19)$$

また、 \mathbf{J}_x と \mathbf{J}_y 及び \mathbf{J}_r と \mathbf{J}_l がそれぞれ直交していることはジョーンズベクトルの内積の定義 (3.18) 式より容易に確認することが出来る。

3.2.2 光学素子とジョーンズ行列 — 偏光状態を変化させる素子 —

光学素子 f を通過する事により光の偏光状態は $f: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}'$ と変化するが、この写像 f の $\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y$ による表現をジョーンズ行列と呼ぶ。すなわち、

$$\begin{pmatrix} J'_x \\ J'_y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}, \quad (T: \text{光学素子 } f \text{ のジョーンズ行列}) \quad (3.20)$$

例 .1 直線偏光子

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

T_x 、 T_y はそれぞれ、 x 方向、 y 方向の直線偏光子をあらわす。

$$T_x \mathbf{J}_x = \mathbf{J}_x, \quad T_x \mathbf{J}_y = 0, \quad T_x \mathbf{J}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{J}_x \quad (3.22)$$

例 .2 遅相子 (wave retarder)

$$T_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

◇ $T_{\Gamma=\pi/2}$ は 1/4 波長板をあらわす。

$$T_{\Gamma=\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

この 1/4 波長板に x 軸に対して 45° 傾いた直線偏光を入射すると、

$$T_{\Gamma=\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \mathbf{J}_l \quad (3.25)$$

となり、左回り円偏光に変換される事がわかる。同様に、 x 軸に対して 45° 傾いた直線偏光に T_Γ を 2 回作用させると

$$T_{\Gamma=\pi/2} T_{\Gamma=\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

となり、 x 軸に対して -45° 傾いた直線偏光に変換される事がわかる。

◇ $T_{\Gamma=\pi}$ は 1/2 波長板をあらわす。

$$T_{\Gamma=\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

1/2 波長板に x 軸に対して 45° 傾いた直線偏光を入射すると、

$$T_{\Gamma=\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}_l \quad (3.28)$$

となり、 x 軸に対して -45° 傾いた直線偏光に変換される事がわかる。

例 .3 偏光回転子 (polarization rotator)

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$\theta = \pi/2$ の時 x 軸に対して 45° 傾いた直線偏光に $T_{\theta=\pi/2}$ を作用させると、

$$T_{\theta=\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

となり、 x 軸に対して -45° 傾いた直線偏光に変換される事が解る。

3.2.3 ジョーンズベクトル、ジョーンズ行列と座標変換、基準モード

ジョーンズベクトル及びジョーンズ行列が座標変換によりどのように変換されるかをみる。古い座標 (x, y) から新しい座標 (x', y') への変換 $R(\theta)$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

とする (x' 軸が x 軸に対して角 θ だけ回転しているとする)。このとき、ジョーンズベクトルは光の偏光方向をあらわす "ベクトル" なので通常のベクトルの変換則に従って

$$\mathbf{J}' = R(\theta)\mathbf{J} \quad (3.32)$$

と変換される。一方、新しい座標系でのジョーンズベクトル (\mathbf{J}') によるジョーンズ行列の表現 T' と、古い座標系でのジョーンズベクトル (\mathbf{J}) によるジョーンズ行列の表現を T の関係は

$$\begin{aligned} \mathbf{J}'_{\text{out}} &= T' \mathbf{J}'_{\text{in}} \\ \Rightarrow R(\theta) \mathbf{J}_{\text{out}} &= T' R(\theta) \mathbf{J}_{\text{in}} \\ \Rightarrow \mathbf{J}_{\text{out}} &= R(\theta)^{-1} T' R(\theta) \mathbf{J}_{\text{in}} \\ \Rightarrow \mathbf{J}_{\text{out}} &= T \mathbf{J}_{\text{in}} \\ \therefore T' &= R(\theta) T R(\theta)^{-1} = R(\theta) T R(-\theta) \end{aligned} \quad (3.33)$$

となり、ジョーンズ行列が座標変換 $(x, y) \rightarrow (x', y')$ により $T \rightarrow R(\theta) T R(-\theta)$ と変化する事が解る。

光学素子を通しても光の偏光状態が変化しない場合、その偏光状態はその光学素子の基準モード (normal mode) であるという。すなわち、基準モードはジョーンズ行列の固有ベクトルとして以下の条件を満たす

$$T \mathbf{J}_{\text{normal}} = \mu \mathbf{J}_{\text{normal}}. \quad (3.34)$$

ジョーンズ行列は 2×2 行列であるから、基準モードはたかだか 2 つである ((3.21) 式であらわされる直線偏光子の様に $\dim(\text{Ker} T) \neq 0$ の場合は 2 つは存在しない)。rank $T = 2$ の場合は基準モードが 2 つ存在するので、入射偏

光 (\mathbf{J} とする) を 2 つの基準モード (\mathbf{J}_1 、 \mathbf{J}_2 とする) に分解することにより ($\mathbf{J} = j_1\mathbf{J}_1 + j_2\mathbf{J}_2$) 透過偏光は

$$T\mathbf{J} = j_1\mu_1\mathbf{J}_1 + j_2\mu_2\mathbf{J}_2 \quad (3.35)$$

の形に常にかける。

3.2.4 偏光状態を記述するパラメーター —ストークスパラメーター—

偏光ベクトルの基底ベクトル (\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2)、(\mathbf{e}^+ , \mathbf{e}^-) への射影を考える。

$$E_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \quad (3.36)$$

$$E_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E} \quad (3.37)$$

$$E^+ = \mathbf{e}^{+*} \cdot \mathbf{E} \quad (3.38)$$

$$E^- = \mathbf{e}^{-*} \cdot \mathbf{E} \quad (3.39)$$

これらは偏光を記述する一般量となる。

$$E_1 = a_1 e^{i\delta_1} \quad (3.40)$$

$$E_2 = a_2 e^{i\delta_2} \quad (3.41)$$

$$E^+ = a_+ e^{i\delta_+} \quad (3.42)$$

$$E^- = a_- e^{i\delta_-} \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

とすると、これらの量からストークスパラメーターと呼ばれる以下の様な量を作ることが出来る

$$s_0 = a_1^2 + a_2^2, \quad (\text{波の強度}) \quad (3.45)$$

$$s_1 = a_1^2 - a_2^2, \quad (y \text{ 偏光に対する } x \text{ 偏光の優位性}) \quad (3.46)$$

$$s_2 = 2a_1a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1), \quad (\text{位相}) \quad (3.47)$$

$$s_3 = 2a_1a_2 \sin(\delta_2 - \delta_1), \quad (\text{位相}) \quad (3.48)$$

or (3.49)

$$s_0 = a_+^2 + a_-^2, \quad (\text{波の強度}) \quad (3.50)$$

$$s_1 = a_+a_- \cos(\delta_+ - \delta_-), \quad (\text{位相}) \quad (3.51)$$

$$s_2 = a_+a_- \sin(\delta_+ - \delta_-), \quad (\text{位相}) \quad (3.52)$$

$$s_3 = a_+^2 - a_-^2, \quad (\text{正負の差}) \quad (3.53)$$

2 つの表記法ともに偏光状態を記述するための独立な変数は 3 個 ($a_1, a_2, \delta_2 - \delta_1$ or $a_+, a_-, \delta_+ - \delta_-$) であるため、 $s_0 \sim s_3$ は独立ではなく

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (3.54)$$

なる関係が成り立つ。これより、偏光方向を表現するには $s_0 = 1$ として、単位球面上の点を指定すれば良い事が解る（ポアンカレ球）。光に統計性がある場合（色々な偏光、位相の光がある確率で分布している場合） s_0, s_1, s_2, s_3 の統計平均の間には

$$\langle s_0^2 \rangle \geq \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + \langle s_3^2 \rangle \quad (3.55)$$

幾つかの例

自然光 $\langle s_1 \rangle = \langle s_2 \rangle = \langle s_3 \rangle = 0$

カニパルサー → 直線偏光

3.3 2 誘電体間（吸収の無い媒質）の境界平面における電磁波の反射と屈折

右図の様に屈折率 n_1 の媒質から屈折率 n_2 の媒質に角度 θ_1 で電磁波が入射する時の反射、透過の問題を考えよう。この問題は反射や透過の向きを定める運動学的な側面と、強度やエネルギーを考える動力的な側面がある。

1. 運動学的な性質：Kinetics

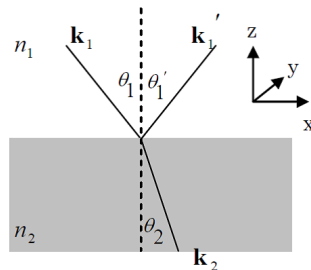
(a) 反射角は入射角に等しい

(b) スネルの法則 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

2. 動力的な性質：Dynamics → \mathbf{E} と \mathbf{B} の境界条件

(a) 反射成分と屈折成分の強度の関係

(b) 位相の変化と偏り



3.3.1 Kinetics

考えている系は x 、 y 方向に並進対称性があるので k_x 、 k_y は系全体で不変である。従って、 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{e}_x$ 。これより、

$$|\mathbf{k}_1| \sin \theta_1 = |\mathbf{k}_1'| \sin \theta_1' = |\mathbf{k}_2| \sin \theta_2. \quad (3.56)$$

さらに、 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_1'| = n_1 \omega / c$ 、 $|\mathbf{k}_2| = n_2 \omega / c$ を考慮すると。

$$n_1 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_1' = n_2 \sin \theta_2 \quad (3.57)$$

となり、反射角が入射角に等しい事及びスネルの法則が出る。

♣ フェルマーの原理による導出

(次章の幾何光学でフェルマーの原理を導出します)

フェルマーの原理 : 光は伝搬時間が最少となる様な経路を通る

屈折率 n_1 の領域の点 A (座標 (x_1, y_1)) から屈折率 n_2 の領域の点 B (座標 (x_2, y_2)) に至るまでの時間が最少になる境界面上の点 C (座標 $(x_0, 0)$) を求める。

$$\begin{aligned} T &= \frac{\bar{AC}}{c/n_1} + \frac{\bar{CB}}{c/n_2} \\ &= \frac{n_1}{c} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

上式の T が最小値 (極値) をとるためには $dT/dx_0 = 0$ とならなければならないが、この条件は、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx_0} &= \frac{n_1}{c} \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2}} - \frac{n_2}{c} \frac{x_2 - x_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{n_1}{c} \sin \theta_1 - \frac{n_2}{c} \sin \theta_2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

となり、やはりスネルの法則 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ が出る。

3.3.2 Dynamics 動力的条件 —Maxwell 方程式の境界条件—

2種類の物質が平面境界で接している場合を考える。自由電荷や自由電流が存在しないとき、 \mathbf{E} と \mathbf{H} の平行成分と \mathbf{D} と \mathbf{B} の垂直成分が連続となる。今、入射、反射、透過波の波数ベクトルを $\mathbf{k}_1 = k_1 \mathbf{e}_1$, $\mathbf{k}'_1 = k'_1 \mathbf{e}'_1$, $\mathbf{k}_2 = k_2 \mathbf{e}_2$ ($|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}'_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$) とすると、

$$\text{入射波} \quad \begin{cases} \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k}_1}{\omega} \times \mathbf{E}_i^0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\text{反射波} \quad \begin{cases} \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r^0 e^{i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}'_1}{\omega} \times \mathbf{E}_r^0 e^{i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\text{屈折波} \quad \begin{cases} \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_t^0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}_2}{\omega} \times \mathbf{E}_t^0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \end{cases} \quad (3.62)$$

これより、 \mathbf{n} を境界面に垂直な単位ベクトル (i.e. \mathbf{e}_z) とすると、 \mathbf{D} の垂直成分の連続性より、

$$(\epsilon_1(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) - \epsilon_2 \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{n}|_{z=0} = 0, \quad (3.63)$$

\mathbf{B} の垂直成分の連続性より、

$$(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_i + \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}_r - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{n}|_{z=0} = 0, \quad (3.64)$$

\mathbf{E} の平行成分の連続性より

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_t) \times \mathbf{n}|_{z=0} = 0, \quad (3.65)$$

\mathbf{H} の平行成分の連続性より

$$(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_i + \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}_r - \mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_t) \times \mathbf{n}|_{z=0} = 0, \quad (3.66)$$

が成立する。ただし両方の媒質に対して透磁率は1としている ($\mu_1 = \mu_2 = 1$)。 (3.63) - (3.66) が全 $x-y$ 面上で成立するためには \mathbf{E}_i 、 \mathbf{E}_r 、 \mathbf{E}_t の指数関数の肩の x, y 依存性等しくなければならないので

$$\mathbf{k}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{k}_r \times \mathbf{n} = \mathbf{k}_t \times \mathbf{n}. \quad (3.67)$$

これより、(3.63) - (3.66) 式は

$$(\epsilon_1(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{E}_r^0) - \epsilon_2\mathbf{E}_t^0) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.68)$$

$$(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}_r^0 - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_t^0) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.69)$$

$$(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{E}_r^0 - \mathbf{E}_t^0) \times \mathbf{n} = 0, \quad (3.70)$$

$$(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}_r^0 - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_t^0) \times \mathbf{n} = 0, \quad (3.71)$$

となる。以下では (3.68) - (3.71) を2種類の偏光の場合に解いてゆく。

(a). \mathbf{E} が常に \mathbf{n} と垂直な場合 (s 偏光)

(3.68) 式は自動的に成立。(3.70) 式、 \mathbf{E} と \mathbf{n} が垂直なことより、

$$\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{E}_r^0 - \mathbf{E}_t^0 = 0 \quad (3.72)$$

また、(3.71) 式より

$$(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{E}_i^0 + (\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{E}_r^0 - (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n})\mathbf{E}_t^0 = 0 \quad (3.73)$$

ただし、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ をもちい、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ を考慮している。(3.73) 式は \mathbf{k} と θ の関係を考えて

$$n_1(\mathbf{E}_i^0 - \mathbf{E}_r^0) \cos \theta_1 - n_2\mathbf{E}_t^0 \cos \theta_2 = 0 \quad (3.74)$$

となる。(3.72) 式と (3.74) 式より反射振幅 r_{12}^s と透過振幅 t_{12}^s は以下のようになる

$$r_{12}^s = \frac{|\mathbf{E}_r^0|}{|\mathbf{E}_i^0|} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (3.75)$$

$$t_{12}^s = \frac{|\mathbf{E}_t^0|}{|\mathbf{E}_i^0|} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (3.76)$$

(b). \mathbf{E} が入射面内にある場合 (p 偏光) (3.68) - (3.71) 式を $\mathbf{E}_{i,r,t}$ の代わりに $\mathbf{H}_{i,r,t}$ に関する式として書き直し、(a) の場合と同様の計算を行うと、

$$r_{12}^p = \left| \frac{\mathbf{E}_r^0}{\mathbf{E}_i^0} \right| = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{n_2^2 \cos \theta_1 - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_2^2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (3.77)$$

$$t_{12}^p = \left| \frac{\mathbf{E}_t^0}{\mathbf{E}_i^0} \right| = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_1}{n_2^2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (3.78)$$

入射角がゼロ ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) のとき、(a) と (b) は同じ結果になるべきであるが、確かに、

$$r^{s,p} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (3.79)$$

$$t^{s,p} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (3.80)$$

となり s 偏光、p 偏光の場合で結果は一致する。

s 偏光、p 偏光ともに反射により位相は π ずれる ($\mathbf{E}_r/\mathbf{E}_i < 0$ となる)。この原因を考えよ (宿題)。

スネルの法則を使うと、(3.75) (3.77) 式は次のように書きなおすことができる (宿題)。

$$r_{12}^s = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (3.81)$$

$$r_{12}^p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.82)$$

次に、逆問題として屈折率 n_2 の媒質から屈折率 n_1 の媒質に光が入射する場合を考える。このときの反射係数と透過係数を t' 、 r' とおくと、(3.75)、(3.76)、(3.77)、(3.78) 式より、

$$-r = r' \quad (3.83)$$

$$tt' + r^2 = 1 \quad (3.84)$$

という関係が成り立つ。これをストークスの関係式と呼ぶ。

3.3.3 ブリュースター角

屈折率の小さな媒質から屈折率の大きな媒質に光が入射する場合 ($n_1 < n_2$ の場合) $\cos \theta_2 > \cos \theta_1$ となるので s 偏光では (3.75) 式より $r_{12}^s < 0$ が常に成り立つ。しかし、p 偏光では (3.77) 式よりわかる様に、入射角 θ_B が

$$\theta_B = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (3.85)$$

のとき、反射振幅 r_{12}^p がゼロとなる。そのため、この角度で光が入射すると反射光は完全に s 偏光となる。

ブリュースター角はレーザーキャビティ内部での窓の入射角度として使われる。この場合、p 偏光の反射ロスが高くなり、キャビティから p 偏光でのレーザー発振が生じる。

3.4 薄膜の透過と反射

最後に、真空中においた厚さ d の薄膜（複素屈折率 n ）に光が入射する場合を考える。この場合、膜中での多重反射を考慮する必要がある。この場合の全体の反射係数 r_{121} と透過係数は無限級数を計算することで、

$$r_{121} = \frac{r_{12}(1 - e^{i\phi})}{1 - r_{12}^2 e^{i\phi}} \quad (3.86)$$

$$t_{121} = \frac{(1 - r_{12}^2)e^{i\phi/2}}{1 - r_{12}^2 e^{i\phi}} \quad (3.87)$$

$$\phi := \frac{2n\omega d}{c} \cos \theta_2 \quad (3.88)$$

と計算できる。ただし、 $\phi := (2n\omega d/c) \cos \theta_2$ である。特に、垂直入射の場合は、 $\phi = 2n\omega d/c$ となる。

吸収がない周波数領域の場合は、 n は実数であるので、 ϕ は実数となる。この場合は容易にエネルギー保存則

$$|r_{121}|^2 + |t_{121}|^2 = 1 \quad (3.89)$$

が確認できる。

3.5 エネルギー流の連続性

境界を横切ったエネルギー流が保存していることを示そう。そのためには、ポインティングベクトルの時間平均の z 方向への射影が連続であることを示せばよい。

（復習）

ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ は単位時間に単位面積を通過して流れる電磁場のエネルギー流束をあらわす。E, H を複素数として扱う場合は、**複素ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ の実部がエネルギー流束の時間平均をあたえる**。したがって、S の向きを単位ベクトル l であらわすと、エネルギー流束は、

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}^0|^2 l = \frac{1}{2} n \frac{1}{Z_0} |\mathbf{E}^0|^2 l \quad (3.90)$$

であたえられる。ここに $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ は屈折率（非磁性体を考え、 $\mu = \mu_0$ とする。） Z_0 は真空中のインピーダンス $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.7\Omega$ である。

ちなみに、エネルギー密度の時間平均は

$$u = \frac{1}{4} \left(\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right) = \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}^0|^2 \quad (3.91)$$

とあたえられ、 $|\bar{\mathbf{S}}| = (c/n)u$ という関係式が導かれる。これはエネルギーの流れの速さが、平面波の場合は c/n であることを示している。

角度 θ で面に入射している場合は、面を通過するエネルギー流束は面ベクトルへの射影であたえられる。したがって、単位時間当たり単位面積あたりに面を通過するエネルギー流束の時間平均は、

$$I = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} |\mathbf{E}^0|^2 \cos \theta \quad (3.92)$$

とあたえられる。

(注) 電力の式 $P = IV = V^2/R$ とのアナロジー（ R と Z の関係）。単位時間あたりに単位面積を通過する入射光、反射光、透過光のエネルギー流束の時間平均は、

$$\begin{aligned} \text{入射光} & \quad I_i = \frac{n_1}{Z_0} |\mathbf{E}_i^0|^2 \cos \theta_1 \\ \text{反射光} & \quad I_r = \frac{n_1}{Z_0} |\mathbf{E}_r^0|^2 \cos \theta_1 \\ \text{透過光} & \quad I_t = \frac{n_2}{Z_0} |\mathbf{E}_t^0|^2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.93)$$

であたえられるので、p 偏光の場合以下のように計算される。

$$\begin{aligned} I_r + I_t &= \left\{ \frac{n_1}{Z_0} |r_{12}|^2 \cos \theta_1 + \frac{n_2}{Z_0} |t_{12}|^2 \cos \theta_2 \right\} |\mathbf{E}_i^0|^2 \\ &= \left\{ \frac{n_1}{Z_0} \left(\frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \right)^2 \cos \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_2}{Z_0} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \right)^2 \cos \theta_2 \right\} |\mathbf{E}_i^0|^2 \\ &= \frac{n_1}{Z_0} \cos \theta_1 |\mathbf{E}_i^0|^2 \\ &= I_i \end{aligned} \quad (3.94)$$

したがって、エネルギー反射率として $\rightarrow T + R = 1$ となる。ただし、エネルギー透過率 T 、反射率 R は下記のように定義される量である。

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2)^2} \quad (3.95)$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r_{12}^2 = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (3.96)$$

3.6 全反射

スネルの法則

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \quad (3.97)$$

光学的に厚いもの (n の大きなもの) から、光学的に薄いもの (n が小さなもの) に入射する光 ($n_1 > n_2$) を考えると、スネルの法則 (3.97) より $\theta_2 > \theta_1$ が成り立つ。ところが、入射角 θ_1 を徐々に大きくしていくと、(3.97) 式右辺はあるところで 1 を超えてしまうため、左辺の θ_2 が実数に決まらなくなってしまふ。この、 θ_2 が実数に決まらなくなる入射角 θ_1 (i.e., $(n_1/n_2) \sin \theta_1 = 1$ を満たす θ_1) のことを臨界角 (θ_c) と呼ぶ。

例. ガラス $n_1 = 1.5$ 、空気 $n_2 = 1$ の場合 $\theta_c = 41.8^\circ$

○ θ_1 が θ_c より大きい場合、 θ_2 は実数でなくなる。

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \geq 1 \quad (3.98)$$

$$\therefore \cos^2 \theta_2 = 1 - \sin^2 \theta_2 < 0 \quad (3.99)$$

これより、 $\cos \theta_2$ は以下の様に純虚数になる

$$\cos \theta_2 = \pm i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1}. \quad (3.100)$$

このとき、反射係数は複素数に成るが、s 偏光、p 偏光共にその振幅は

$$|r_{12}^s| = \left| \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \right| = 1, \quad (3.101)$$

$$|r_{12}^p| = \left| \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \right| = 1 \quad (3.102)$$

となり、全反射する事が解る。反射係数の位相を $r^s = e^{i\theta_s}, r^p = e^{i\theta_p}$ とおくと、s, p 偏光での反射光の位相差 $\theta = \theta_p - \theta_s$ は、以下の様に計算される。

$$\tan \frac{\theta_s}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta_1} \quad (3.103)$$

$$\tan \frac{\theta_p}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{(n_2/n_1)^2 \cos \theta_1} \quad (3.104)$$

より、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\sin^2 \theta_1}. \quad (3.105)$$

上式より、p 偏光と s 偏光の反射時の位相差 θ は、入射角 θ_1 が $\theta_1 = \pi/2$, θ_c を満たすときに 0 となる事が解る。また、s 偏光と p 偏光の位相差の最大値は

$$\frac{d\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{d\theta_1} = 0 \quad (3.106)$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta_1 = \frac{2n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \quad (3.107)$$

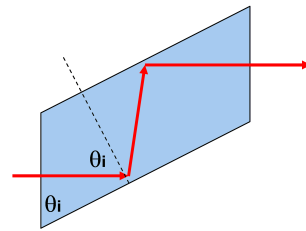
を満たす入射角 θ_1 の時に実現され、その時の位相差 θ_m は、

$$\tan\frac{\theta_m}{2} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1n_2} \quad (3.108)$$

であたえられる。

例 フロムネル（計算を確かめよ）

θ_1 の角を持つ菱面体（ロム）を使って、側面から 45 度偏光の光を垂直入射し、内部全反射を 2 回使って遅相子を作ることが出来る。例えば、 $\lambda/4$ 波長板（直線偏光 → 円偏光）の場合、全体の位相差が $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち、一回の反射で位相差が $\pi/4$ 付くようにすれば良い。 $n = 1.5$ の材料（ガラス）を用いた場合 $\theta_i = 51.8^\circ$ とするとこの条件が実現できる。



3.6.1 全反射におけるエバネッセント波

$\theta_1 \gg \theta_c$ の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_t e^{i(k_2 \sin\theta_2 x + k_2 \cos\theta_2 z) - i\omega t} \\ &= \mathbf{E}_t e^{i\left(k_2 \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_1 x \pm k_2 i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 - 1} z\right) - i\omega t} \\ &= \mathbf{E}_t e^{i\left(k_2 \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_1 x - \omega t\right)} e^{\mp k_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 - 1} z} \end{aligned} \quad (3.109)$$

+ 符号は z 方向に増加するのでおかし。したがって、- 符号のみをとる。これは z 方向に指数関数的に減衰する波を表している（エバネッセント波）。しみ出し長、

$$l_2 = \frac{1}{k_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 - 1}} \approx \lambda_2 \quad (3.110)$$

は光の波長程度である。

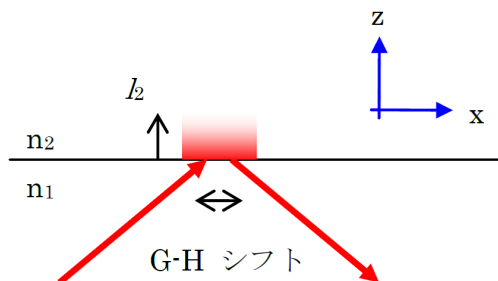
エバネッセント波は x 方向には波数 $k_2(n_1/n_2) \sin \theta_1$ で伝搬する波である。
この波数の大きさを考える。

$$n_1 = 1.5 \text{ (ガラス)}, n_2 = 1 \text{ (空気)}, \theta_1 = 51.8^\circ \text{ で}$$

$$k_2(n_1/n_2) \sin \theta_1 = (n_2\omega/c)(n_1/n_2) \sin \theta_1 = 11.8\omega/c$$

エバネッセント波は空気中を伝播するにもかかわらず空気中の波数より大きい波数をもつ。

全反射 $\theta_1 \gg \theta_c$ においては、Phase shift がある \rightarrow 光束も横方向にシフト。
これをグースヘンシェン (G-H) シフトとよぶ。



3.6.2 光のトンネル効果

以下では、TM 波 (p 偏光) のみ考え、下記のような 2 境界の透過、反射の問題を考えることとする。とりあえずは、全反射を考えずに計算し、最終的に入射角 θ_1 を臨界角 θ_c 以上にした時に何が起こるかをみとめることにする。

領域 $1 \rightarrow 2$

$$t_{12} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (3.111)$$

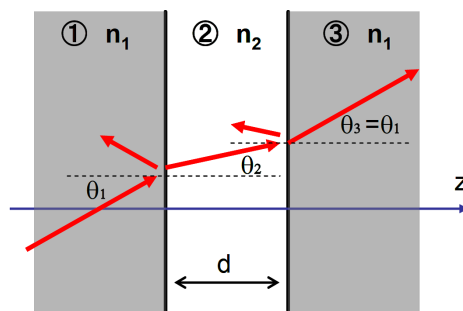
$$r_{12} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (3.112)$$

領域 $2 \rightarrow 3$

上の 2 つの式を $n_1 \rightarrow n_2, n_2 \rightarrow n_1, \theta_1 \rightarrow \theta_2, \theta_2 \rightarrow \theta_1$ とすれば良いので、

$$t_{23} = \frac{2n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} \quad (3.113)$$

$$r_{23} = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} \quad (3.114)$$



領域 $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ は逆過程なので、 $t_{23} = t'_{12}$, $r_{23} = r'_{12}$ であるが、ストークスの関係式 (3.83) (3.84) と比較すると確かに、

$$r_{23} = -r_{12} \quad (3.115)$$

$$t_{12}t_{23} = \frac{4n_1n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2)^2} = 1 - r_{23}^2 \quad (3.116)$$

が成立していることが確認できる。

以前やった多重反射の問題と全く同じ取り扱いで透過電場は計算でき、結果は以下ようになる。

$$\mathbf{E}_t = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{i\phi}} e^{i\phi/2} \mathbf{E}_0, \quad \phi := 2d \frac{n_2 \omega}{c} \cos \theta_2 \quad (3.117)$$

ただし、 $r^2 = r_{12}^2 = r_{23}^2$ としている。上式より、透過率は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} T &= \left| \frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_0} \right|^2 = \frac{(1 - r^2)^2}{1 - 2r^2 \cos \phi + r^4} \\ &= \frac{(1 - r^2)^2}{1 + r^4 - 2r^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{n_2^2 \cos^2 \theta_1 - n_1^2 \cos^2 \theta_2}{2n_1 n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2} \sin \frac{\phi}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \sin \frac{\phi}{2} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.118)$$

ここで、 $k_1 = (\omega/c)n_2 \cos \theta_1$, $k_2 = (\omega/c)n_1 \cos \theta_2$ としている。また、1行目から2行目への変形では $\cos \phi = 1 - 2 \sin^2(\phi/2)$ をもちいている。

ここから入射角が臨界角以上になった場合を考える。

この場合、領域 2 はエバネッセント波だけが存在する。前項と異なるのは、 z 方向減衰、 z 方向増加の両方のエバネッセント波が存在することである。この場合、 $\cos \theta_2$ は純虚数となるので k_2 も純虚数となる。実数 η, Q を

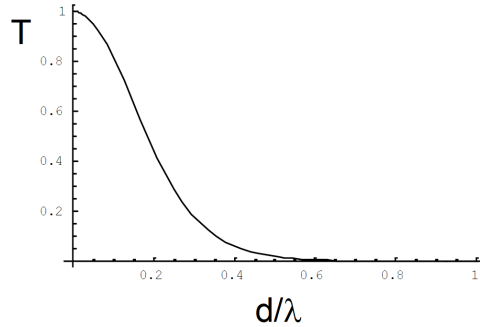
$$\frac{n_2}{n_1} k_2 = i\eta, \quad (3.119)$$

$$Q = \frac{\frac{n_2}{n_1} k_1^2 + \frac{n_1}{n_2} \eta^2}{2k_1 \eta} \quad (3.120)$$

とおくと、透過率の式は以下ようになる。

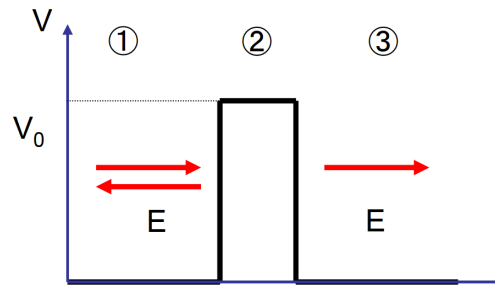
$$T = \frac{1}{1 + (Q \sinh(\eta d))^2}. \quad (3.121)$$

定義より解る様に η, Q は入射角や媒質の屈折率で決まる量であり、媒質間距離 d には依存しない。このため、透過率の d 依存性は \sinh の中の部分のみとなる。この d 依存性を $n_1 = 1.5, \theta_1 = 51.8$ の場合に計算したのが右の図である。横軸は波長を単位にした距離であり、波長の半分ぐらいの距離まで物体を離すと透過しなくなることがわかる。



(発展問題)

上で述べた光のトンネル現象は、ポテンシャル V_0 に運動エネルギー E の粒子があたり、トンネル透過する量子力学の問題と等価である。古典的には全反射するエネルギー領域での透過問題！



領域 2 で波数が虚数になってしまう点は下記の対応になっている。

$$k_2^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_1 \cos \theta_2\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \quad (3.122)$$

前頁で求めた透過率の表式において下記の入れ替えをおこなうとまったく同じ答えとなることを確認せよ !!

$$\eta = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (3.123)$$

$$k_1 = \frac{2mE}{\hbar} \quad (3.124)$$

$$Q = \frac{k_1^2 + \eta^2}{2k_1\eta} \quad (3.125)$$