2017年度　電磁気学C
レポート問題回答（2017 12/8 出題）

平成30 年1 月3 日

1　反対方向に伝搬する２つの平面波

(1) 三角関数の加法定理を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t) &= E_0\cos(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + E_0\cos(kz+\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} \\ &= 2E_0\cos(kz)\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

を得る。また、真空中におけるマクスウェル方程式から

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}(z,t)}{\partial t} + \nabla\times\boldsymbol{E}(z,t) = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(z,t) = 0 \tag{1.3}$$

式 (1.1) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{B}(z,t)}{\partial t} &= -2\cos(\omega t)E_0\nabla\times(\cos(kz)\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= 2k\sin(kz)\cos(\omega t)E_0\hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(z,t) &= (\int_0^t 2k\sin(kz)\cos(\omega t)E_0 dt)\hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{B}(z,0) \\ &= \frac{2k}{\omega}\sin(kz)\sin(\omega t)E_0\hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{B}(z,0)\end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで式 (1.4) を式 (1.1),(1.2) に代入することで、$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{B}(z,0) = 0$ が導かれる。これは $\boldsymbol{B}(z,0)$ が空間的に一様であることを示しており、$\boldsymbol{B}(z,0) = 0$ としても差し支えない。ゆえに

$$\boldsymbol{B}(z,t) = \frac{2k}{\omega}\sin(kz)\sin(\omega t)E_0\hat{\boldsymbol{y}} \tag{1.5}$$

を得る。

(2) 電場の瞬時及び時間平均のエネルギー密度は

$$\begin{aligned}\text{瞬時} &: \frac{1}{2}\epsilon\boldsymbol{E}(z,t)^2 = 2\epsilon E_0^2\cos^2(kz)\cos^2(\omega t) \\ \text{時間平均} &: \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\epsilon\boldsymbol{E}(z,t)^2 dt = \epsilon E_0^2\cos^2(kz)\end{aligned}$$

磁場の瞬時及び時間平均のエネルギー密度は

$$\begin{aligned}\text{瞬時} &: \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}(z,t)^2 = 2\epsilon E_0^2\sin^2(kz)\sin^2(\omega t) \\ \text{時間平均} &: \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}(z,t)^2 dt = \epsilon E_0^2\sin^2(kz)\end{aligned}$$

ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(z,t)$ と時間平均は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}(z,t) &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{E_0^2}{\mu c}\sin(2kz)\sin(2\omega t)\hat{\boldsymbol{z}} \\
\text{時間平均} &: \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{S}(z,t)dt = 0
\end{aligned}$$

2 トポロジカル絶縁体

(1) 自由な電荷や電流がない物質中のマクスウェル方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}(z,t)}{\partial t} + \nabla\times\boldsymbol{E}(z,t) = 0 \tag{2.1}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}(z,t) - \frac{\partial \boldsymbol{D}(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{2.2}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(z,t) = 0 \tag{2.3}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(z,t) = 0 \tag{2.4}$$

ここで、

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E} - \alpha\boldsymbol{B} \tag{2.5}$$
$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} + \alpha\boldsymbol{E} \tag{2.6}$$

を代入すると、$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$ に対する方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}(z,t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(z,t) = 0 \tag{2.7}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}(z,t) - \epsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{2.8}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(z,t) = 0 \tag{2.9}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(z,t) = 0 \tag{2.10}$$

を得る。また次に、単色平面波の $\boldsymbol{E}$ が解であることを示す。式 (2.7) に対し、$\boldsymbol{\nabla}\times$ の演算を行うと

$$\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial \boldsymbol{B}(z,t)}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(z,t)) \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\text{式 (2.11) の左辺} &= \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(z,t)) \\
&= \epsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(z,t)}{\partial t^2} \quad \text{(式 (2.8) より)} \\
\text{式 (2.11) の右辺} &= -\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) + \nabla^2\boldsymbol{E} \\
&= \nabla^2\boldsymbol{E} \quad \text{(式 (2.10) より)}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(z,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.12}$$

であり、単色平面波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ は式 (2.12) の解である (ただし、$\omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}|\vec{k}|$)。同様に式 (2.7), (2.8), (2.9) から

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}(z,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.13}$$

となり、単色平面波の磁場も解であることが示された。

(2) 境界面に対し垂直方向を z 軸、物質境界面が xy 平面に対応するように座標軸をとる。今、入射波 $\boldsymbol{E}^{in}(\boldsymbol{r},t)$ が x 軸方向に偏向し、物質に対し垂直に入射する場合を考える ($\boldsymbol{E}^{in}(\boldsymbol{r},t) = E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{\boldsymbol{e}_x}, \boldsymbol{k}_{in}//\hat{\boldsymbol{e}_z}$)。また、透過波 $\boldsymbol{E}^t(\boldsymbol{r},t)$、反射波 $\boldsymbol{E}^r(\boldsymbol{r},t)$ を平面波と仮定する。このとき、式 (2.1) と (2.2) に対するマクスウェル境界条件から、電場及び磁場の境界面 (z=0) に対する平行成分の条件式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^t_{||}(0,t)) &= (\boldsymbol{E}^{in}_{||}(0,t) + \boldsymbol{E}^r_{||}(0,t)) && (2.14) \\ \boldsymbol{H}^t_{||}(0,t) &= (\boldsymbol{H}^{in}_{||}(0,t) + \boldsymbol{H}^r_{||}(0,t)) && (2.15) \end{aligned}$$

を得る。また、$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{in} = \nabla\cdot\boldsymbol{E}_r = 0$ より $\boldsymbol{k}_{in}\cdot\boldsymbol{E}_{in} = \boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{E}_r = 0$ なので $\boldsymbol{E}^t(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{E}^r(\boldsymbol{r},t)$ は z 軸成分を持たない。したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^t(0,t)) &= (\boldsymbol{E}^{in}(0,t) + \boldsymbol{E}^r(0,t)) && (2.16) \\ \boldsymbol{H}^t(0,t) &= (\boldsymbol{H}^{in}(0,t) + \boldsymbol{H}^r(0,t)) && (2.17) \end{aligned}$$

となる。反射波 $\boldsymbol{E}^r(0,t)$ を求めるには、式 (2.17) 中の磁場 $\boldsymbol{H}$ を電場 $\boldsymbol{E}$ で表し、式 (2.16) と (2.17) の連立方程式を解けば良い。$\boldsymbol{H}^{in}(0,t)$,$\boldsymbol{H}^r(0,t)$ はそれぞれ、式 (2.1) から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{in}(0,t) &= \frac{1}{\mu_0\omega}\boldsymbol{k}_{in}\times\boldsymbol{E}^{in}(0,t) \\ &= \frac{k_0}{\mu_0\omega}(-E^{in}_y, E^{in}_x, 0) \quad (\text{ただし } \boldsymbol{k}_{in}//\hat{\boldsymbol{e}}_z\text{、} k_0 = |\boldsymbol{k}_{in}|) && (2.18) \\ \boldsymbol{H}^r(0,t) &= \frac{1}{\mu_0\omega}\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}^r(0,t) \\ &= \frac{-k_0}{\mu_0\omega}(-E^r_y, E^r_x, 0) \quad (\text{ただし } \boldsymbol{k}_r = -\boldsymbol{k}_{in}) && (2.19) \end{aligned}$$

一方、透過波は式 (2.6) と (2.7) から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^t(0,t) &= \frac{-\boldsymbol{k}_t}{\omega\mu}\times\boldsymbol{E}^r(0,t) + \alpha\boldsymbol{E}^t \\ &= (\frac{-k}{\omega\mu}E^t_y + \alpha E^t_x, \frac{k}{\omega\mu}E^t_x + \alpha E^t_y, 0) \ (\boldsymbol{k}_t//\hat{\boldsymbol{e}}_z\text{、} k = |\boldsymbol{k}_t|) && (2.20) \end{aligned}$$

式 (2.18),(2.19),(2.20) を式 (2.17) に代入すると

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{-k}{\omega\mu} & 0 \\ \frac{k}{\omega\mu} & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{E}^t(0,t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-k_0}{\omega\mu_0} & 0 \\ \frac{k_0}{\omega\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\boldsymbol{E}^{in}(0,t) - \boldsymbol{E}^r(0,t))$$

式 (2.16) より、$\boldsymbol{E}^t$ を消去すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^r(0,t) &= \frac{1}{\alpha^2 + \frac{1}{\omega^2}(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k}{\mu})^2} \\ &\quad \begin{pmatrix} (\frac{k_0^2}{\omega^2\mu^2} - \frac{k^2}{\omega^2\mu^2}) - \alpha^2 & \frac{-2k_0\alpha}{\omega\mu_0} & 0 \\ \frac{2k_0\alpha}{\omega\mu_0} & (\frac{k_0^2}{\omega^2\mu^2} - \frac{k^2}{\omega^2\mu^2}) - \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{E}^{in}(0,t) \\ &= \frac{E_0 e^{i\omega t}}{\alpha^2 + \frac{1}{\omega^2}(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k}{\mu})^2} (\frac{k_0^2}{\omega^2\mu_0^2} - \frac{k^2}{\omega^2\mu^2} - \alpha^2, \frac{2k_0\alpha}{\omega\mu_0}, 0) \end{aligned}$$

したがって反射波は直線偏向であり、偏向軸が x 軸に対し回転している。その角度 θ_K は

$$\begin{aligned} \theta_K &= Arctan(\frac{\frac{2k_0\alpha}{\omega\mu_0}}{\frac{k_0^2}{\omega^2\mu_0^2} - \frac{k^2}{\omega^2\mu^2} - \alpha^2}) \\ &= Arctan(\frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\alpha}{\frac{\epsilon_0}{\mu_0} - \frac{\epsilon}{\mu} - \alpha^2}) \end{aligned}$$

ここで、$\alpha = 0$ で $\theta_K = 0$ であり偏向軸は回転しない。また

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^r(0,t) &= \frac{E_0 e^{i\omega t}}{(\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k}{\mu})^2} (\frac{k_0^2}{\mu_0^2} - \frac{k^2}{\mu^2}, 0, 0) \\ &= \frac{E_0 e^{i\omega t}}{\frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k}{\mu}} (\frac{k_0}{\mu_0} - \frac{k}{\mu}, 0, 0) \\ &= E_0 e^{i\omega t} \frac{1 - \sqrt{\frac{\epsilon\mu_0}{\epsilon_0\mu}}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon\mu_0}{\epsilon_0\mu}}} \hat{\boldsymbol{e}_x} \end{aligned}$$

これは、$\mu = \mu_0$ のとき、フレネル反射に対応する。