2022 年 2 月 13 日
草場　哲（京都大学→横浜国立大学）

電磁波の電場とエネルギー流の関係

連続波の電磁波における電場とエネルギー流の関係を計算してみる。ポインティングベクトルは

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

また、電磁波（簡単のために$\boldsymbol{x}$方向に進むとする。）

$$\boldsymbol{E}(x,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E_0} \exp(ikx - i\omega t)]$$

$$\boldsymbol{B}(x,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{B_0} \exp(ikx - i\omega t)]$$

$$\left(\boldsymbol{E}(x,t) \perp \boldsymbol{B}(x,t)\right)$$

について、Faraday-Maxwell 則より

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(x,t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$

$$ikE_0 = i\omega B_0$$

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$$

従って

$$E(x,t) = \frac{1}{c} B(x,t)$$

よって、

$$S = \frac{1}{\mu_0} |\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}|$$

$$= \frac{1}{\mu_0} E(x,t) \cdot \frac{1}{c} E(x,t)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} |E(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E(x,t)|^2$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 \cos^2(kx - \omega t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 \cdot \frac{1 + \cos(2kx - 2\omega t)}{2}$$

両辺の時間平均をとり、整理すると

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2$$

$$|E_0| = 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}} \langle S \rangle^{\frac{1}{2}}$$

2022年2月13日
草場　哲（京都大学→横浜国立大学）

である。MKSA単位系では

$$\varepsilon_0 = 8.85418782 \cdot 10^{-12}\ [\mathrm{m^{-3}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2}]$$
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.25663706 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{m\ kg\ s^{-2} A^{-2}}]$$

より、

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{8.85418782 \cdot 10^{-12}}{1.25663706 \cdot 10^{-6}}} = 0.00265441873\ [\mathrm{m^{-2} kg^{-1} s^3 A^2}]$$

$$\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1.25663706 \cdot 10^{-6}}{8.85418782 \cdot 10^{-12}}\right)^{\frac{1}{4}} = 19.409541808\ \left[\mathrm{m\ kg^{\frac{1}{2}}\ s^{-\frac{3}{2}}\ A^{-1}}\right]$$

これを用いると電場とエネルギー流の関係は

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|E_0|^2 = 0.00132720936 \cdot |E_0|^2$$

$$|E_0| = 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}}\langle S \rangle^{\frac{1}{2}} = 27.4492372643 \cdot \langle S \rangle^{\frac{1}{2}}$$

である。今、電場の単位は$[\mathrm{V\ m^{-1}}] = [\mathrm{m\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}}]$、エネルギー流の単位は$[\mathrm{W\ m^{-2}}] = [\mathrm{kg\ s^{-3}}]$である。これをそれぞれ$[\mathrm{V\ cm^{-1}}]$、$[\mathrm{W\ cm^{-2}}]$になおすには、$|E_0|$を$10^2$倍、$\langle S \rangle$を$10^4$倍すればよいので、結局式は変わらず

$$\langle S \rangle\ [\mathrm{W\ cm^{-2}}] = 1.32720936 \cdot 10^{-3} \cdot |E_0\ [\mathrm{V\ cm^{-1}}]|^2$$
$$|E_0\ [\mathrm{V\ cm^{-1}}]| = 27.4492372643 \cdot (\langle S \rangle\ [\mathrm{W\ cm^{-2}}])^{\frac{1}{2}}$$

まとめ：電磁波の電場とエネルギー流の関係

電磁波の電場の大きさ$E_0\ [\mathrm{V\ cm^{-1}}]$とエネルギー流$I = \langle S \rangle\ [\mathrm{W\ cm^{-2}}]$の関係は

$$I = 0.001327 \cdot {E_0}^2$$
$$E_0 = 27.45 \cdot \sqrt{I}$$