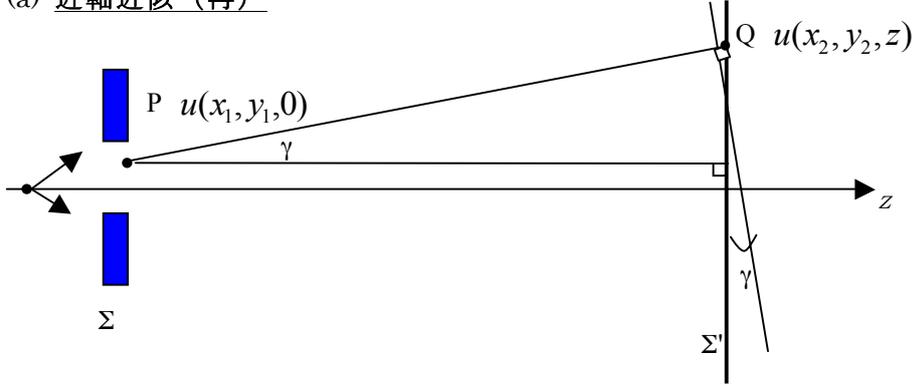


1 1 . 光の回折と散乱 I

回折とは光が物体を回り込んで伝播する現象である。

(a) 近軸近似 (再)



ホイヘンスの原理を用いてスクリーン上の Q 点での電場を考える。

開口 Σ 中の点 P から発生する 2 次波の Σ' 平面への投影成分は

$$u(x_2, y_2, z) \approx \alpha \frac{e^{-i k_0 r}}{r} \cos \gamma u(x_1, y_1, 0) \quad (11-1)$$

ここに $\alpha = \frac{i}{\lambda_0}$ である¹。

Σ' 面上での光電場はすべての P 点からの 2 次波の重ね合わせであるから、

$$u(x_2, y_2, z) = \frac{i}{\lambda_0} \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) \frac{e^{-i k_0 r}}{r} \cos \gamma dx_1 dy_1 \quad (11-2)$$

と表せる。

ここで、距離 $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2}$ である。

¹ α の決定 ; $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

開口 Σ をなくして、平面波かつ $x_2 = y_2 = 0$ の点を見ると、

$$u(x_1, y_1) = 1$$

$$\begin{aligned} u(0, 0, z) &= \frac{\alpha e^{-i k_0 z}}{z} \iint e^{-\frac{i k_0}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} dx_1 dy_1 \\ &= \frac{\alpha e^{-i k_0 z}}{z} \left(\sqrt{\frac{2z_0}{i k_0}} \sqrt{\pi} \right)^2 = \alpha \frac{2\pi}{i k_0} e^{-i k_0 z} = \frac{\lambda_0}{i} \alpha e^{-i k_0 z} \end{aligned}$$

これより、 $\alpha = \frac{i}{\lambda_0}$

PQ が z 軸とほぼ平行な場合、すなわち $\gamma \approx 0, \cos \gamma \approx 1$ の場合を考える。(近軸近似)
今までは、 $r \approx z$ として取り扱ってきた。

しかし、指数の中の r に関しては、

$$e^{ik_0 r} = e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} r}$$

$$\frac{e^{ik_0 r}}{e^{ik_0 z}} = e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} (r-z)} \neq 0 \quad (11-3)$$

考えている領域では、 $\left| \frac{r-z}{\lambda_0} \right| \gg 1$ であるので、

故に、

$$r = z \sqrt{1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{z} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{z} \right)^2}$$

$$\approx z + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2z} + \dots \quad (11-4)$$

$$= z + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z} - \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1}{z} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z} + \dots$$

第4項までとると、

$$u(x_2, y_2, z) = A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{\frac{ik_0}{z}(x_2 x_1 + y_2 y_1)} e^{-\frac{ik_0}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} dx_1 dy_1 \quad (11-5)$$

となる。ただし、

$$A_0(x_2, y_2, 0) = \frac{ie^{-ik_0 z}}{\lambda_0 z} e^{-\frac{ik_0}{2z}(x_2^2 + y_2^2)} \quad (11-6)$$

である。(11-5) 式を回折の フレネル(Fresnel)近似 と呼ぶ。

(b) フラウンホーファー (Fraunhofer) 近似

(11-4) の第4項が小さい場合には、(11-5) 式は次のように変形される。

$$u(x_2, y_2, z) = A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{\frac{ik}{z}(x_2 x_1 + y_2 y_1)} dx_1 dy_1 \quad (11-7)$$

これを回折の フラウンホーファー近似 と呼ぶ。

近似の正当性

4項が充分小さい。即ち、開口 Σ の x 、 y 座標の最大値を x_{1MAX} 、 y_{1MAX} とおくと、

$$\frac{k_0}{2z}(x_{1MAX}^2 + y_{1MAX}^2) \ll 1 \quad (11-8)$$

Σ (開口)を円と考えると、その直径 D を用いて、

$$x_{1MAX}^2 + y_{1MAX}^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (11-9)$$

と表すことができる。したがって、Fraunhofer 近似において条件式 (11-8) は

$$z \gg \frac{k_0}{2} \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\lambda_0} \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{A}{\lambda_0} \quad (11-10)$$

となる。ここで、 A は開口(円)の面積である。

例： 開口が 1mm 、 $\lambda_0 = 1\mu\text{m}$ の場合、 $z \gg 10^{-6}\text{m}^2 / 10^{-6}\text{m} = 1\text{m}$ であれば Fraunhofer 近似が使える。

(11-7) 式において、 $f_x = -x_2 k_0 / z$, $f_y = -y_2 k_0 / z$, とおくと、
(f_x, f_y は空間フーリエ周波数と呼ぶ。)

$$u(x_2, y_2, z) = A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \quad (11-11)$$

この式は $(x_1, y_1) \rightarrow (f_x, f_y)$ への 2次元フーリエ変換に相当する。

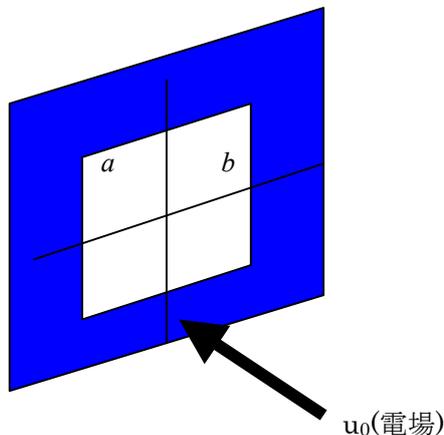
(c) フラウンホーファー回折の具体例

i) 単一開口の場合 (例)

● 方形の場合

$$\begin{aligned} u(x_2, y_2, z) &= A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \\ &= A_0 u_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{ax_2}{\lambda_0 z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{ay_2}{\lambda_0 z}\right) \end{aligned} \quad (11-12)$$

但し、 $\operatorname{sinc}(X) = \sin(\pi X) / \pi X$ である。

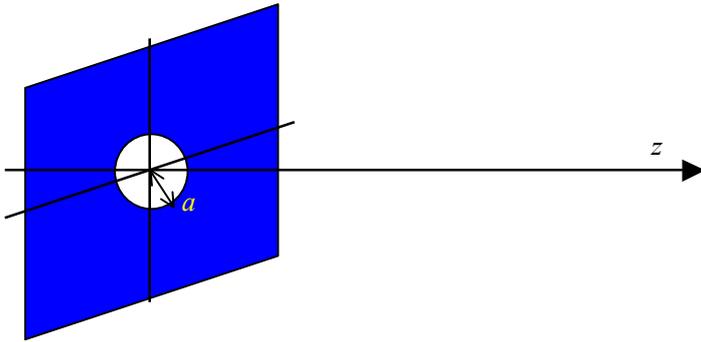


従って、強度分布は

$$\begin{aligned} I(x_2, y_2, z) &= |u(x_2, y_2, z)|^2 \\ &= I_0 \operatorname{sinc}^2(X) \operatorname{sinc}^2(Y) \end{aligned} \quad (11-13)$$

ただし、 $X = \frac{ax_2}{\lambda_0 z}, Y = \frac{ay_2}{\lambda_0 z}$

● 円形の場合



極座標表示で表す。

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1, \quad y_2 = r_2 \sin \theta_2$$

$$\begin{aligned} u(r_2, \theta_2, z) &= A_0(x_2, y_2, z) \iint_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) e^{-i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \\ &= A_0 u_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-\frac{ik_0}{z} r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} r_1 dr_1 d\theta \quad (11-14) \\ &= A_0 u_0 (\pi a)^2 \frac{2J_1\left(\frac{k_0 a r_2}{z}\right)}{\frac{k_0 a r_2}{z}} \end{aligned}$$

ただし、 J_1 は1次のベッセル関数である。

例題

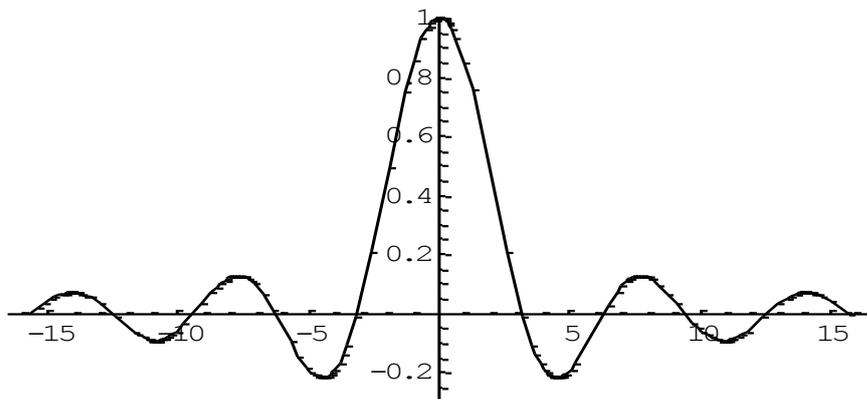
1. (11-14)式が成り立つことを示せ。

Hint: ヤコビ・ポアンカレの展開式 $e^{1z \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta}$ を適用し、

漸化式 $J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x)$ は両辺に x^n をかけて整理すると、

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \text{ となることを用いよ。}$$

$\frac{\sin(x)}{x}$ のグラフ



$\frac{J_1(x)}{x}$ のグラフ

