6　物質中の電磁波 I

6-1.　絶縁体中での平面電磁波（6.1 は復習なので、知っている人はとばすこと）

$\rho = 0, \quad \mathbf{i} = 0$　誘電体の中を考えるので $\mathbf{P}$ があらわに現れる。

ただし、磁性はないものとする。すなわち $\mathbf{M} = 0$。

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0 \qquad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (1.3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \qquad (1.16)$$

◎　応答関数による $\mathbf{P}(t)$ の記述

$\mathbf{P}(t)$ は外場によって生じた応答である。

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \chi(t - t')\mathbf{E}(t')dt'$$

$\chi(t)$ は応答関数と呼ばれる実関数である。

因果律から、むかしの電場に対する応答のたたきこみ積分になるべき。

$t \le 0 \quad \chi(t) = 0$

$t \ge 0 \quad \chi(t)$　　とすると

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t')\mathbf{E}(t')dt'$$

フーリエ成分で表現

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

逆変換　$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t)e^{i\omega t} dt$

同様に　$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{\mathbf{p}}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega$

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{\chi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\boxed{\mathbf{P}(\omega_0) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}(\omega_0) \tilde{\mathbf{E}}(\omega_0)}$$

←たたきこみ積分のフーリエ変換は積になる！

◎　絶縁体の中での波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathbf{E} + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t')\mathbf{E}(t')dt'\right) = 0$$

フーリエ変換をすることで

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \tilde{\chi}(\omega))\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = 0$$

ここで、$\tilde{\chi}(\omega)$は応答関数$\underline{\chi(t)}$の逆フーリエ変換であり、<u>複素感受率</u>とよぶ。

複素感受率は　線型の関係式　$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$　の応答係数となっている。

<u>複素感受率</u>は一般的には複素関数である。複素関数の性質から、一般的に$\tilde{\chi}(\omega)$が満たすべき種々の性質が導かれる。これについては問題および後の章で述べる。

複素比誘電率　$1 + \tilde{\chi}(\omega) = \varepsilon_r(\omega)$　　　複素誘電関数（誘電率）　$\varepsilon_0(1 + \tilde{\chi}(\omega)) = \varepsilon(\omega)$

が定義される。電磁場のフーリエ成分は複素誘電関数を用いて

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$$

という関係式が得られる。誘電関数の満たすべき関係式も同様に導かれる。

また、　　$1 + \tilde{\chi}(\omega) = \tilde{n}^2(\omega)$　　複素屈折率の二乗　を定義すると、

$$\boxed{\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\omega) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = 0 \qquad (3.9)}$$

ヘルムホルツの波動方程式

$\tilde{n}$が実数の場合、$\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$として$x$方向に進行する平面波（３次元）$e^{i\mathbf{k}\cdot x - i\omega t}$を考えると、

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \qquad (3.10)$$

という分散式が得られる。

自由空間での波動方程式の解

以下、３次元の場合、具体的に電場は波数$\mathbf{k}$、振動数ωの平面波の場合、

$$\mathbf{E}^{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}^0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}$$
$$\mathbf{B}^{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{x},t)=\mathbf{B}^0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}$$

と書ける。一般の波は様々な$\mathbf{k}$、ωによる重ね合わせとなる。//

ここで電場、磁場は実数で与えられる観測量なので、上記のような複素表現をとるときは、最後には実部を代入することを意味するものとする。

$$\mathbf{E}^{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{x},t)=\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}^0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\right)$$
$$\mathbf{B}^{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{x},t)=\mathrm{Re}\left(\mathbf{B}^0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\right)$$

$\mathbf{k}$　方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{\eta}$とする。

$$\mathbf{k}=k\boldsymbol{\eta}$$

この時 Gauss の法則から

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0=0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{E}_0=0$$

ファラデーの法則

$$\mathbf{i}\,\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0=\mathbf{i}\omega\mathbf{B}_0 \qquad \mathbf{B}_0=\frac{k}{\omega}\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{E}_0$$

左から$\mathbf{E}_0$をかけて$(\mathbf{E})=\dfrac{n}{c}\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{E}$

$$\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{E}_0=0 \quad //$$

6-2.　直線偏りと円偏り：ジョーンズベクトルと stokes パラメーター

電磁場の偏光ベクトルの理解とその操作に関する数学的取り扱いは、実際の応用では頻繁に現れるが、あまり教科書できちんと記述されていない。ここでは、偏光状態の記述について述べる。

$\mathbf{k}$　と垂直な面内のベクトル$\mathbf{E}_0$は２通りの独立な向きをとれる､それぞれの単位ベクトルを$\mathbf{e}_1$　$\mathbf{e}_2$　（互いに直交）とすると、電場は

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{e}_1\mathbf{E}_1 e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{i}\omega t}$$
$$\mathbf{E}_2=\mathbf{e}_2\mathbf{E}_2 e^{\mathbf{i}\mathbf{k}.\mathbf{x}-\mathbf{i}\omega t}$$

と書ける。一般的にはこの２つの重ね合わせが一般的。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=(\mathbf{e}_1\mathbf{E}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{E}_2)e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{i}\omega t}$$

$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$は複素数であり、異なる偏りの電磁波の間に位相差の可能性を許す。

① $\mathbf{E}_1$と$\mathbf{E}_2$が同位相の場合、「直線偏り」と呼ぶ。

位相を０と置けば、$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ は実数で、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\sqrt{\mathbf{E}_1{}^2+\mathbf{E}_2{}^2}\left\{\frac{\mathbf{E}_1}{\sqrt{\mathbf{E}_1{}^2+\mathbf{E}_2{}^2}}\mathbf{e}_1+\frac{\mathbf{E}_2}{\sqrt{\mathbf{E}_1{}^2+\mathbf{E}_2{}^2}}\mathbf{e}_2\right\}e^{\mathbf{ik}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{i}\omega t}$$

② $\mathbf{E}_1$ と $\mathbf{E}_2$ が異なる位相をもつ場合、位相差を ϕ とおく。「楕円偏光」

◎最も簡単な場合　$\mathbf{E}=|\mathbf{E}_1|=|\mathbf{E}_2|$　　$\phi=\pm\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\sqrt{2\mathbf{E}^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1\cdot\pm\frac{\mathbf{i}}{2}\mathbf{e}_2\right)e^{\mathbf{ik}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{i}\omega t}$$

実部に意味がある。

$$=\mathbf{E}(\mathbf{e}_1\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\mp\mathbf{e}_2\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t))\quad\text{円偏光}$$

$\mathbf{e}^+=\mathbf{e}_1+\mathbf{ie}_2$　右円偏り　時計回り

$\mathbf{e}^-=\mathbf{e}_1-\mathbf{ie}_2$　左円偏り　反時計回り

これは明らかに一次変換であるので、

$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ のかわりと、$\mathbf{e}^+$ と $\mathbf{e}^-$ を基底にとることもできる。//

したがって、一般に

$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=(\mathbf{E}^+\mathbf{e}^++\mathbf{E}^-\mathbf{e}^-)e^{\mathbf{ik}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{i}\omega t}$　とも書ける。

③ $\mathbf{E}^+$ と $\mathbf{E}^-$ の位相が同じ場合「楕円偏り」を表す。

$\mathbf{E}^+(\mathbf{e}_1+\mathbf{ie}_2)+\mathbf{E}^-(\mathbf{e}_1-\mathbf{ie}_2)$　　$\mathbf{E}^+$ と $\mathbf{E}^-$ を同位相とする。

$=(\mathbf{E}^++\mathbf{E}^-)\mathbf{e}_1+\mathbf{i}(\mathbf{E}^+-\mathbf{E}^-)\mathbf{e}_2$

④ $\mathbf{E}^+$ と $\mathbf{E}^-$ の位相が同じで、特に同じ絶対値を持つ場合　　直線偏光

○ ジョーンズベクトル

(Ⅰ)ベクトルと行列による偏光の記述

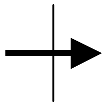
$\mathbf{E}(x,t)=\mathbf{E}_x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\mathbf{E}_y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　　$\mathbf{E}_x$ と $\mathbf{E}_y$ は複素数

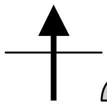
$$=\sqrt{|\mathbf{E}_\mathbf{x}|^2+|\mathbf{E}_\mathbf{y}|^2}\left\{\underbrace{\frac{\mathbf{E}_x}{\sqrt{|\mathbf{E}_x|^2+|\mathbf{E}_y|^2}}}_{\uparrow A_x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\underbrace{\frac{\mathbf{E}_y}{\sqrt{|\mathbf{E}_x|^2+|\mathbf{E}_y|^2}}}_{\uparrow A_y}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

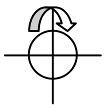
$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix}$　：ジョーンズベクトル（複素ベクトル）

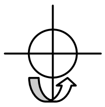
$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* = \mathbf{A}_{1x}\mathbf{A}_{2x}^* + \mathbf{A}_{1y}\mathbf{A}_{2y}^* = 0$ であれば、$\mathbf{J}_1$ と $\mathbf{J}_2$ は直交している。

例１　基底ベクトルの例

$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ x 方向の直線偏光 

$\mathbf{J}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y 方向の直線偏光 

$\mathbf{J}_r = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ 右まわりの円偏光 

$\mathbf{J}_l = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ 左まわりの円偏光 

任意のジョーンズベクトルは $\mathbf{J}_x$ and $\mathbf{J}_y$ or $\mathbf{J}_r$ and $\mathbf{J}_l$ で記述できる。　これらが直交

していることは直ぐに確かめられる。$\mathbf{J}_x \cdot \mathbf{J}_y^* = \mathbf{J}_r \cdot \mathbf{J}_l^* = 0$

$$\mathbf{J} = \alpha_x \mathbf{J}_x + \alpha_y \mathbf{J}_y = \alpha_r \mathbf{J}_r + \alpha_l \mathbf{J}_l$$

(Ⅱ)　<u>光学素子－偏光状態を変化させる素子</u>

$$\mathbf{J}_2 = T\mathbf{J}_1$$

偏光の状態の変化をあらわす行列をジョーンズ行列と呼ぶ。

例２

(a)　直線偏光子　$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

はそれぞれ、x 方向の直線偏光子、y 方向の直線偏光子である。

$T\mathbf{J}_x = \mathbf{J}_x$　　$T\mathbf{J}_y = 0$　　$T\mathbf{J}_r = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{J}_x$

(b)　遅相子　(wave retarder)　$T_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{pmatrix}$

$\Gamma = \dfrac{\pi}{2}$ ： $1/4$ 波長板　$T_{\Gamma=\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$T_{\Gamma=\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$　　２回作用させると　$T_{\Gamma=\frac{\pi}{2}} T_{\Gamma=\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

45° 直線偏光 → 左回り円偏光　　　　45° 直線偏光 → -45° 直線偏光

$\Gamma = \pi$ ： $\frac{1}{2}$波長板　$T_{\Gamma=\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$T_{\Gamma=\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

＋45° 直線 → －45° 直線

(C)偏光回転子(polarization rotator)

$$T_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad T_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} T_{\theta=\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑45°　↑－45°

(III)　ジョーンズベクトル、ジョーンズ行列の座標変換と基準モード

ジョーンズベクトルやジョーンズ行列は座標系のとり方に依存する。(x,y)座標系から(x',y')座標系に変換した場合、次のように変換される。

$$J' = R(\theta)\mathbf{J}$$

ここで、$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$であり θ は x 軸に対する x'軸の角度である。

この場合、ジョーンズ行列も次のように変換される。

$$T' = R(\theta)TR^{-1}(\theta) = R(\theta)TR(-\theta)$$

光学素子を通しても光の偏光状態が変化しない場合、その偏光状態はその光学素子の基準モード（normal mode）これは、ジョーンズ行列があるジョーンズベクトルに対して、下記を満たすことを意味する。

$$T\mathbf{J}_1 = \mu\mathbf{J}_1$$

ジョーンズ行列は２ x ２の行列であるから、基準モードは（あるとしたら）、２つ存在する。それを$\mathbf{J}_1.\mathbf{J}_2$とすると、$\mathbf{J}$であたえられる偏光状態の光が光学素子に入射すると、その透過光は常に下記の形にかけることになる。

$$T\mathbf{J} = j_1\mu_1\mathbf{J}_1 + j_2\mu_2\mathbf{J}_2$$

○　偏光状態を記述するパラメーター→Stokes parameter

基末ベクトル$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}^+$、$\mathbf{e}^-$への射影を考える。
すなわち、

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}、\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}、\overset{*}{\mathbf{e}^+} \cdot \mathbf{E}、\overset{*}{\mathbf{e}^-} \cdot \mathbf{E} \quad //$$

は偏光を記述する一般量となる。

$$\mathbf{E}_1 = a_, e^{\mathrm{i}\delta 1}、\mathbf{E}_2 = a_2 e^{\mathrm{i}\delta 2}$$
$$\mathbf{E}^+ = a_+ e^{\mathrm{i}\delta t}、\mathbf{E}^- = a_- e^{-\mathrm{i}\delta}$$

とすると、これの量からつくられる。Stokesパラメーターは

$$\mathbf{s}_0 = {a_1}^2 + {a_2}^2 \quad \text{→波の強度}$$

$$\mathbf{s}_1 = {a_1}^2 - {a_2}^2 \quad \text{→y偏光に対するxの優位度}$$

$$\mathbf{s}_2 = 2a_1 a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) \quad \text{→位相}$$
$$\mathbf{s}_3 = 2a_1 a_2 \sin(\delta_2 - \delta_1) \quad \text{→位相}$$

or

$$\mathbf{s}_0 = a^2{}_+ + a^2{}_- \quad \text{→波の強度}$$

$$\mathbf{s}_1 = a_+ a_- \cos(\delta^+ - \delta^-) \quad \text{→位相}$$
$$\mathbf{s}_2 = a + a\mathbf{i}\sin(\delta^+ - \delta^-) \quad \text{→位相}$$

$$\mathbf{s}_3 = {a_+}^2 - {a_-}^2 \quad \text{→正・負の差}$$

$\mathbf{s}_0 \sim \mathbf{s}_3$は独立ではない。
a_1、a_2、$e^{(\delta_2 - \delta_1)}$しかないから。

実際　$\mathbf{s}_0{}^2 = \mathbf{s}_1{}^2 + \mathbf{s}_2{}^2 + \mathbf{s}_3{}^2$

一般的な光（電磁波）は様々な位相、振播の波がランダムに重なりあっている。

$$\mathbf{s}_0{}^2 \geq \mathbf{s}_1{}^2 + \mathbf{s}_2{}^2 + \mathbf{s}_3{}^2 \quad //$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_3 = 0 \quad \text{となる} \quad //$$

幾つかの例

０の場合、特に<u>自然光</u>

カニパルサー　→直線偏光