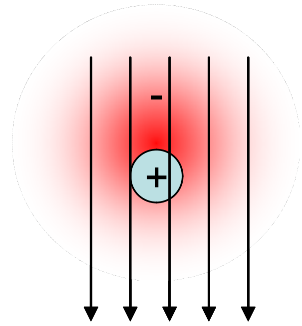
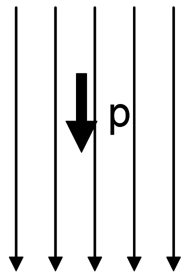
３．物質中の Maxwell 方程式 I

３－１．分極と磁化

○分極

“誘電体”の分極 **P**



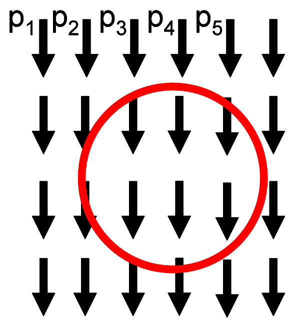


電場 **E** のもとに直流電気の流れない物質をおくとどうなるか？

原子を考える。

本当は量子力学が必要　→今は定性的に議論する。

E によって電荷のずれが生じ「分極」ができる。



「物質」はこのような原子の集合体。

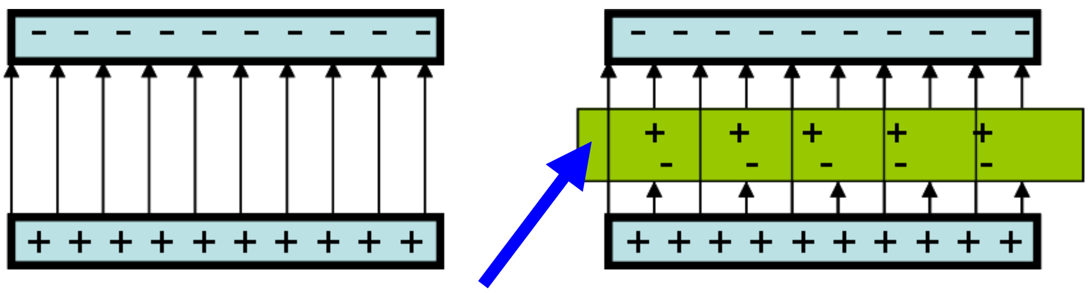
マクロには単位体積あたりの平均で記述する。例えば、

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V}\sum_{\mathrm{i}} \mathbf{p}_{\mathrm{i}} \qquad (3.1)$$

である。まず、以下では原子が密に存在するとして、連続量の P を定義できたとして話を進める。

◎　この様な「物質」を電荷 Q で充電したコンデンサーにいれてみよう。

Q=CV　　$E = \dfrac{Q}{Cd}$



内部では電場が減少する！

誘電体の表面で Gauss の定理を使うと面電荷定度が求まる。

$$\sigma_{分局} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} \qquad (3.2)$$

$E = \dfrac{Q}{cd}$ を考えると、内部では一見 **E** が減少したことに相当。

$$\rho_{分極} = -\nabla\cdot\mathbf{P} \qquad (3.3)$$

◎　この修正を(1.1)に加える　→　電荷を二種類に分ける

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_{自由}+\rho_{分極}}{\varepsilon_0}=\frac{\rho_{自由}-\nabla\cdot\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

これから、ガウスの法則は新しい場を導入して書き換えることができる。

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})=\rho_{自由}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{自由}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{P}$$

◎　またアンペールの法則(1.14)は

$$c^2\nabla\times\mathrm{B}=\frac{\mathbf{i}_{自由}+\mathbf{i}_{分極}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial t}$$

先程の(1.14)より、$\dfrac{\partial\rho_{分極}}{\partial t}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{P}=-\nabla\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$

$$/\!/$$

$$-\nabla\cdot\mathbf{i}_{分極}$$

一方の連続の式は

よって$\mathbf{i}_{分極}=\dfrac{\partial\mathbf{p}}{\partial t}$

故に、

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{i}_{自由}}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{i}_{自由}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial}{\varepsilon_0\partial t}(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})\qquad(3.4)$$

以上をまとめると、

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{自由}\qquad(3.5)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\qquad(3.6)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0\qquad(3.7)$$

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{i}_{自由}}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\qquad(3.8)$$

ここで　$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$　(3.9)

○　<u>よくある記述法</u>

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi\mathbf{E}\qquad(3.10)$$

$\varepsilon=(1+\chi)\varepsilon_0$　$1+\chi=\varepsilon_r$　：比誘電率

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$
$$= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$ ←線型を仮定

しかし、$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ には問題あり、比較的狭い範囲でしか成り立たない。
すなわち、

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left(\chi \mathbf{E} + \underbrace{\chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + ..-}_{\text{非線型分極}} \right)$$

○磁化 **M**

磁石はどう扱う？

磁石は外部の磁場に平行にそろい内部磁場を強くする → コイルの鉄心

量子学的効果！！

磁化 **M** の存在は環状電流の存在を意味している。磁化が存在するときは、必ず環状電流があると考える。詳しくは、Feymann Ⅳ p-232 を参照。この電流を磁化を生み出す電流として

$$\mathbf{i}_{極化} = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3.11)$$ と書く。

アンペールの法則の再修正

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}_{自由}}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{M} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$c^2 \nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2} \right) = \frac{\mathbf{i}_{自由}}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{H} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (3.12)$$

を定義すると、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_{自由} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.13)$$

ここで、あたらしく導入された場 **D, H** の中の **P** と **M** の符号に注意。

「分極により、電場は減少するが磁化により磁場は増加する！」

以上をまとめると、よく知られた Maxwell 方程式のセットが得られる。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{自由} \qquad (3.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (3.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_{自由} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (3.17)$$

物質方程式

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad (3.9)$$

$$\mathbf{H} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M} \qquad (3.12)$$

３－２．巨視的 Maxwell 方程式と物質の応答

３－２－１．点分布と連続分布

物理量の粗視化

$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$$

$$i(x) = \sum_j i_j \delta(x - xj)$$

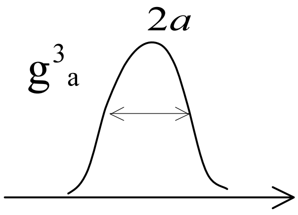
δ 関数で定義された局所的な分極や電流から連続分布の分布関数を定義する。とびとびの値から連続量の関数をつくるために、ある領域（半径を a とする）の物理量を平均化するため

$$\mathrm{g}^3(x) \to \int \mathrm{g}^3(x) dx^3 = 1$$

の、粗視化関数 $\mathrm{g}^3(x)$を考える。これは、原点を中心に半径 a の領域で値をもち、全空間で積分すると 1 に規格化された関数である。これをもちいて局所分布を畳み込み積分すると、ピンぼけしたように値をもつ物理量が定義できる。これを粗視化とよび、得られた物理量を巨視的な物理量とよぶ。たとえば、分極密度や電流密度は以下のように与えられる。

$$P(x) \equiv \langle p \rangle = \underbrace{\int p(x') \mathrm{g}^3{}_a (x - x') dx'^3}_{\text{畳み込み積分}} = \underline{\sum_i p_i \mathrm{g}^3{}_a (x - x_i)}$$

$$I(x) \equiv \langle i \rangle = \underbrace{\int i(x') \mathrm{g}^3{}_a (x - x') dx'^3}_{\text{畳み込み積分}} = \underline{\sum_j i_j \mathrm{g}^3{}_a (x - x_i)}$$



分布関数

３－２－２．　微視的 Maxwell 方程式から巨視的 Maxwell 方程式へ

空間に多数の価電粒子が存在し、それらが電荷や電流を担っている場合を考える。
粒子間は真空であるので電場 e、磁場 b と電束密度 d 、磁場の強さ h 間に

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} \\ \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h} \end{cases}$$

… ‡(

の関係が成立する。また、電荷分布が $\boldsymbol{\gamma}(t)$、電流密度が $j(t)$ で与えられたとすると、
マクスウェル方程式は

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbf{d} = \boldsymbol{\gamma} & \cdots \ ‡(\\
\nabla \times \mathbf{e} = -\dfrac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{t}} & \cdots \ ‡1 \\
\nabla \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} & \cdots \ ‡(\\
\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{t}} & \cdots \ ‡1
\end{cases}
$$

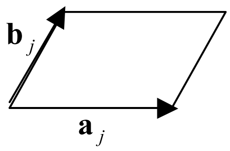
で与えられる。このように、個々の電荷や電流を担うものを正確に扱う電磁場の方程式を微視的 Maxwell 方程式と呼ぶ。
これから、方程式を粗視化して巨視的な場で記述された Maxwell 方程式を導こう。
ここで、電荷や電流の分布がどのように与えられるかを考える。自由な電荷や電流ばかりでなく、分極や分極電流、微小環状電流も電荷分布や電流分布にきいてくる。

$$
\gamma(\mathrm{t}) = \gamma_{free} + \gamma_{dipole}
$$

$$
= \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) - \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{分極電荷}
$$

$$
\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{free} + \mathbf{j}_{dipole} + \mathbf{j}_{loop}
$$

$$
= \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}_i \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}_{\equiv \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}} + \sum_j (\mathbf{m}_j \times \nabla) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)
$$



$$
\boxed{\mathbf{m}_j = \mathrm{I}_j \mathbf{a}_j \times \mathbf{b}_j}
$$

A. 電磁場の粗視化

原子や粒子の半径 a_B に比べると大きい範囲 a で粗視化する。すなわち、a を

$a >> a_B$ とする。粗視化が簡単にできる Maxwell eqs は以下の 2 つである。

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \\
\nabla \times \mathbf{e} = -\dfrac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{t}}
\end{cases}
$$

[どんな場合にもソース無しなので常に成立する]

巨視的な場の量を B ＝〈 b 〉、E ＝〈e〉とすると

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \\
\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}}
\end{cases}
\qquad \text{ただし、} \qquad \mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle = \int \mathrm{g}^3{}_{\mathrm{a}}(x - x')\mathbf{e}(x') d^3 x'
$$

一般に、ＤとＨは電荷分布や電流分布で変化するような物理量である。ただし、真空中の場合は、以下のようにあたえられるので、これをベースに考えていく。

$$\mathbf{D}_0 = \langle \mathbf{d} \rangle = \varepsilon_0 \langle \mathbf{e} \rangle = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$ ただし、

$$\mathbf{H}_0 = \langle \mathbf{h} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \mathrm{B}$$

B. 電荷分布の粗視化

ガウスの法則の粗視化

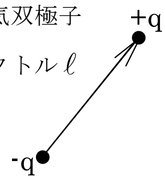
$$< \nabla \cdot \mathrm{d} > = < \boldsymbol{\gamma}_{free} > + < \boldsymbol{\gamma}_{dipole} >$$

$$\nabla \cdot < \mathrm{d} > = \nabla \cdot \mathbf{D_0} = < \boldsymbol{\gamma}_{free} > + < \boldsymbol{\gamma}_{dipole} >$$

$$\rho_{free}(x) = \langle \boldsymbol{\gamma}_{free} \rangle$$
$$= \int \mathrm{g}^3{}_{\mathrm{a}}(x - x') \sum_i q_i \delta^3 (x' - x_i) dV'$$
$$= \sum_i \mathrm{g}_{\mathrm{a}}{}^3 (x - x_i) q_i$$

電気双極子

ベクトル ℓ



i 番目の双極子 $\mathbf{P}_j = q_j \ell_j$ の位置を x_j とした

同様に

$$\rho_{dipole} = -\sum_i (p_j \cdot \nabla) g_a{}^3 (x - x_a)$$

一方、双極子分布も粗視化すると

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{p} \rangle = \sum_j \mathbf{p}_j \, \mathrm{g}^3{}_{\mathrm{a}} (x - x_j)$$ また、 $\rho_{dipole} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ より

$$\nabla \cdot \mathbf{D_0} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \boldsymbol{\rho}_{free}$$

$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ とおくと、巨視的なガウスの法則

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{free}$ が得られる。

C. 電流分布の粗視化

$$\nabla \times \mathbf{h} - \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \mathbf{j}$$ を粗視化する

左辺： $\nabla \times \langle \mathbf{h} \rangle - \dfrac{\partial \langle \mathbf{d} \rangle}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}_0 - \dfrac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t}$

右辺： $\mathbf{j}_{free} = \langle \mathbf{j}_{free} \rangle = \sum_j q_j \mathbf{v}_j \, \mathrm{g}_{\mathrm{a}}{}^3 (x - x_j)$

$$\mathbf{j}_{loop} = -\sum_j (\mathbf{m}_j \times \nabla) g_a{}^3 (x - x_j)$$

$$= \sum_j \nabla \times \mathbf{m}_j\, g_a{}^3 (x - x_j)$$

$$= \nabla \times \mathbf{M}(x) \qquad \left[\because \mathbf{M} = \sum_j \mathbf{m}_j\, g_a{}^3 (x - x_j) \right]$$

$$\mathbf{j}_{dipole} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}$$

となる

以上をまとめると

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 - \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t} = \mathbf{J}_{free} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\nabla \times (\mathbf{H}_0 - \mathbf{M}) = \mathbf{J}_{free} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}_0 + \mathbf{P})$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{free} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}$$

$\langle \because \mathbf{H}_0 - \mathbf{M} = \mathbf{H}$とする。また、$\mathbf{D}_0 + \mathbf{P} = \mathbf{D}$である$\rangle$

３－２－３　　　電気双極子や微小環状電流の粗視化の意味

粗視化すると微小な分極や環状電流は平均的な値をもつ一つの分極や環状電流に置き換えることができる。