2.　真空中の Maxwell 方程式 II

２－１　スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

－真空中の Maxwell 方程式の一般解－

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1.1)'$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (1.2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad (1.3)$$

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad (1.4)'$$

Tips !　任意のベクトル $\mathbf{A}$ 、およびスカラー $\mathbf{\Phi}$ に対して、

恒等式　$\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=0$　(2-1)

$\nabla\times\left(\nabla\Phi\right)=0$　(2-2)

ρ, $\mathbf{i}$ などの湧き出し（源）が存在する場合には、前回に波動方程式を出したように、簡単な場に関する微分方程式を導けない（例題）。そこで場をポテンシャルによってあらわして、ポテンシャルの満たすべき微分方程式を考える。

例題

上記の真空中の Maxwell 方程式から次の２つの微分方程式が導かれることを示せ。

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho+\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{i}$$

$$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B}=-\mu_0\nabla\times\mathbf{i}$$

1st step

(1.3)より出発。(2.1)より　$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$　(2.3)

のようにベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を定義する。 $\mathbf{A}$ は下記のような不定性がある。

$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\chi$　　ここで χ は任意のスカラー　(2.4)

ゲージ不定性

2nd step

（1.2）のファラデーの法則に(2.3)を代入

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore\quad \nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$$

(2.2)より、$\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\phi$ のようなスカラーポテンシャルϕが定義できる。

故に　$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$　　(2.5)

(2.5)で(2.4)の不定性を考えると、

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}'-\nabla\chi$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)$$

$$=-\nabla\left(\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)-\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$ ここで $\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}$　(2.6)　とおくと

$$=-\nabla\phi'-\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$

(2.5)と同じ式になった。

したがって、(2.4)で(2.6)の変換に対して $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ が不変であることがわかる。

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\chi \qquad (2.4)$$

$$\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t} \qquad (2.6)$$

この変換をゲージ変換と呼ぶ。

Tips !　ところで、χ はどんなスカラー関数でもよいのだろうか？ $\nabla\cdot\mathbf{A}'=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla^2\chi$　から、$\mathbf{A}$ の発散を利用して決定することが多い。$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$　をクーロンゲージとよぶ。

3rd step

これまで二つの式から　$\mathbf{B}=\nabla\times A$　　(2.3)

$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial A}{\partial t}$　(2.5)　　と書けた。

残りの２式から $\mathbf{A}$ と ϕ が満たす微分方程式を求めればよい。

Gauss の法則　(1.1)’

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\left(-\nabla\phi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$-\nabla^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.7)$$

4th step

Ampère の法則　(1.4)' より

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$c^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}$$

$$c^2\left(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}\right)=\frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}$$

ここで適当なゲージ変換をおこなって、$\mathbf{A}$ と ϕ が $\boxed{\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0}$　(2.8)

となるようにする。　ローレンツゲージ

ローレンツゲージをみたす(2.4)(2.6)の χ はどのような方程式を満たすか？

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\chi,\quad \phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

ローレンツゲージの条件(2.8)の左辺にゲージ変換を代入。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla^2\chi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi=0$$

となるように、χ を定める。この場合 $\mathbf{A}'$ と ϕ' はローレンツゲージの条件を満たす。以下では、このように変換された $\mathbf{A}'$ と ϕ' を $\mathbf{A}$ と ϕ と記すことにする。

3rd step と 4th step で得られたポテンシャルに関する Gauss の法則と Ampère の法則にローレンツゲージの条件を代入すると、下記のポテンシャルに関する微分方程式が得られる。

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad(2.9)$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}=-\frac{\mathbf{i}}{c^2\varepsilon_0}\qquad(2.10)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\qquad\boxed{\text{ローレンツゲージ}}$$

(2.9)、(2.10)は共に非同次“ヘルムホルツ方程式！”

Final Stage

ここから(2.9)と(2.10)を解いて ϕ と $\mathbf{A}$ を求める。

一般的に、$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-4\pi\underline{f(x,t)}$　(2.11)　//

↑源

これは下記をみたす Green 関数を用いて、

$$\left(\nabla^2 - \frac{\iota}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G^{(\pm)}(x;t;x',t') = -4\pi\delta(x-x')\delta(t-t') \quad (2.12)$$

解けばよい。
右辺はデルタ関数であるから、(x',t')の場所にある局所源が(x,t)に、いかなる場を作るかを記述する。したがって(2.11)の特解は

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \int G^{(\pm)}(x;t;x',t')f(x',t')d^3x'dt$$ となる。

例。境界がない自由空間の場合（少し長いけど、アウトラインを記述してあります。）

相対時間$\boldsymbol{\tau} = t - t'$、相対距離$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$だけの関数である。

また等方的なので球対称、すなわち$|\mathbf{R}|$のみの関数となるべき。

時間についてフーリエ変換した Green 関数の満たすべき微分方程式

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G^{\pm}(k,\omega) = -4\pi\delta(R)$$

は$\nabla^2 = \frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(R\varphi)$ をもちいると、下記のように変形されて解ける。

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}\left(RG^{\pm}(R)\right) + K^2G^{\pm}(R) = -4\pi\delta(R)$$

$R \neq 0$ で $\frac{d^2}{dR^2}\left(RG^{\pm}(R)\right) + K^2\left(RG^{\pm}(R)\right) = 0$

$$\boxed{G_k^{\pm}(R) = \frac{1}{R}e^{\pm ikR} \qquad (2.13)}$$

一般解 $\underline{G_h^{-}(R) = AG_k^{(+)}(R) + BG_k{}^{(-)}R}$ $\boxed{A + B = 1}$

↓ $\downarrow_k$ 収束する球面波

原点から外に広がる球面波

ただし、

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}d\omega \qquad \delta(-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$\omega' = -\omega \qquad d\omega' = -d\omega$$

$$\delta(-\tau) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega'\tau}(-d\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega'\tau}d\omega' = \delta(\tau)$$

ωに関してフーリエ逆変換すると、

$$G^{\pm}(R,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int G_k^{\pm}(R)e^{-i\omega\tau}d\omega \qquad \leftarrow k\text{は}\frac{\omega}{c}\text{であることに注意}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{\pm ikR}}{R}e^{-i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{R}\underline{e^{\pm i\omega\frac{R}{c}}e^{-i\omega\tau}}d\omega$$

↑デルタ関数

$$=\frac{1}{R}\delta\left(\tau\mp\frac{R}{c}\right) \qquad (2.14)$$

$$\therefore \qquad G^{\pm}(R,\tau)=\frac{\delta\left(t-t'\pm\frac{|x-x'|}{c}\right)}{|x-x'|}=\frac{\delta\left(-t'+\left[t\mp\frac{|x-x'|}{c}\right]\right)}{|x-x'|}$$

$$=\frac{\delta\left(t'-\left[t'\mp\frac{|x-x'|}{c}\right]\right)}{|x-x'|} \qquad (2.15)$$

$t'=t\mp\frac{|x-x'|}{c}$　tは現在の時間

$G^{(+)}$は現在より前の時間

$G^{(-)}$は現在より後の時間　　の源による解。

因果律の話—前者を遅延グリーン関数　(Retarded Green fn.)

後者を先延グリーン関数　(Advanced Green fn.) と呼ぶ。

このグリーン関数を用いると、非同次ヘルムホルツ方程式(2.11)の特解は、

$$\varphi^{(x,t)}=\iint G^{\pm}(x,t;x',t')f(x',t')d^3x'dt \qquad (2.16)$$

となる。$f(x',t')$は$t'=0$の近傍でのみ0でないとすると、$t\to-\infty$では(2.11)の右辺＝0の同次方程式の解となる。この源がない場合の解を$\varphi_{in}(x,t)$としよう。　この場合、時間がたって源が work し出すと源から波が生成される。この場合、遅延グリーン関数を用いた

$$\varphi(x,t)=\varphi_{in}(x,t)+\iint G^{(+)}(x,t;x',t')f(x',t')d^3x'dt' \qquad (2.17)$$

が解となる。$t\to-\infty$で$\varphi_{in}(x,t)=0$という最も簡単な場合には、源からの因果律が考慮された下記の解となる。t'に関する積分は実行して、

$$\varphi(x,t)=\int\frac{[f(x',t')]_{ret}}{|x-x'|}d^3x' \tag{2.18}$$

$[f(x',t')]ret$ は時間 t' として遅延時間 $t'=t-\dfrac{|x-x'|}{c}$ を用いることを示す。

以上から、ポテンシャル $\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}$ の解は、

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho(x',t')]ret}{|x-x'|}d^3x' \tag{2.19}$$

$$\mathbf{A}\ (\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{[\mathbf{i}(x',t')]ret}{|x-x'|}d^3x' \tag{2.20}$$

となる。

このように。ポテンシャルは電荷と電流のわき出しからクーロンの法則と遅延効果で決定されることがわかる。

２－２．電磁場におけるエネルギー密度とエネルギー流

1884 年は Poynting による議論

相対論においては“全世界的”な保存則は成立しない。局所的な保存則のみ意味がある。

例　$\nabla\cdot\mathbf{i}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$　電荷の消失は電流の外部への流れを意味する。

（電荷保存例）

電磁気におけるエネルギー保存を定量的に書き表してない。

$$\nabla\cdot\mathbf{S}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

のような式が構築できればよい。

ここで u は電磁場のエネルギー密度、$\mathbf{S}$ は電磁場のエネルギー流（単位時間に単位面積あたりを通過するエネルギー量）である。u, S はこれから以下での議論から定義される。

ところで、この保存式は一般には成立しない。

例えば

・暗い部屋でスイッチを入れたらライトがつく。

フィラメント→黒体輔射→光

・荷電粒子の電磁場による加速運動

物質に対する仕事を含めなければならない。以下では荷電粒子にする仕事を考慮して議論を進める。

ローレンツ力　$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$

↑粒子の charge

単位体積に N 個の粒子　N 倍

仕事率　$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \underline{Nq\mathbf{v}}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{E}$　　(2.21)

↑ $\mathbf{i}$

したがって $-\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{S} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{i}$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{i} = -\nabla\cdot S - \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.22)$$

$\mathbf{S}$ と u の表式を左辺から推察する。Maxwell 方程式(1.4)', (1,3)から、

$$\mathbf{i} = \varepsilon_0 c^2 \nabla\times\mathbf{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\therefore\quad \mathbf{E}\cdot\mathbf{i} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) - \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad (2.23)$$

ここで　　　　一方

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\\&=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\\&-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\end{aligned}}$$

$$= -\varepsilon_{0c^2}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \varepsilon_0 c^2\mathbf{B}\cdot\underline{(\nabla\times\mathbf{E})} - \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

↑ Faraday(1.2)を使うと

$$= -\varepsilon_0 c^2\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \varepsilon_0 c^2\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$= -\varepsilon_0 c^2\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right\}$$

したがって、

$$E\cdot i = -\varepsilon_0 c^2\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right\} \qquad (2.24)$$

この表式から

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \qquad (2.25)$$　S はポインティングベクトル

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \qquad (2.26)$$

とすればうまくいく。 (2.26)は静電場、静磁場のエネルギーと一致

ただし場のエネルギー　$u = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \dfrac{\varepsilon_0 c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$　は定数分だけ不定。

２－３．エネルギー流の例

例１　電磁波

$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$　　$|B| = \dfrac{|\mathbf{E}|}{c}$　　よって　$|\mathbf{S}| = \varepsilon_0 c^2 \cdot |B||E| = \varepsilon_0 c |\mathbf{E}|^2$

一方　$u = \dfrac{\varepsilon_0}{2}|E|^2 + \dfrac{\varepsilon^0 c^2}{2}|B|^2$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}|E|^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\frac{|E|^2}{c^2}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}|E|^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\frac{|E|^2}{c^2} = \varepsilon_0 |E|^2$$

単位時間、単位面積あたりの量にするには、速さcでかければよい。

$\therefore$　$uc = \varepsilon_0 c |E|^2$

これは$|\mathbf{S}|$と同じである。

例２　充電しつつあるキャパシタ

円盤状のキャパシタ→円周状に磁場が存在

ちょうど外周上での磁場の大きさは

$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = + \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$　より、

$2\pi a c^2 |\mathbf{B}| = \pi a^2 |\dot{E}| = \pi a^2 \dot{E}$　　（簡単に）

$$|B| = \frac{a}{2c^2}\dot{E}$$

よって、ポインティングベクトルは極板間と外から内向きに

大きさ　$|\mathbf{S}| = \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E}||\mathbf{B}| = \dfrac{a\varepsilon_0 c^2}{2c^2} E \mathring{E} = \dfrac{a\varepsilon_0}{2} E\dot{E}$

外側の面積は$2\pi a h$であるから、全液入量は　$\pi a^2 \varepsilon_0 h E \dot{E}$ となる。

一方、極板間の電場Eは一定と見なせるから、全エネルギーは

$U = \pi a^2 h \times \dfrac{\varepsilon_0}{2} E^2$であり、そのエネルギーの変化は　$\dfrac{du}{at} = \pi a^2 h \varepsilon_0 E \dot{E}$

やはり上記と一致する。

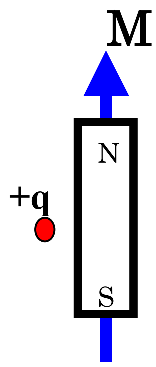
★　電磁場のエネルギーは極板間から流入する点がおもしろい。

以下の 2 つは授業を良く思い出してください。

例３　導体電線中を電流か流れているときのＳとｕ

$i = \sigma E$　オームの法則

発熱してくるエネルギーはどこから流入してくるか論ぜよ。



例４　下図のように棒磁石の隣に電荷ｑをそっと置いたときの

S を図示せよ。この磁石の磁化を一瞬にして

消失させると何がおきるか？

その現象は何を意味するか？

２－４．電磁場の運動量

電磁場にエネルギー流が存在するとき、物体に運動量を与えることができる。たとえば、電磁波の一種である光を鏡で完全反射させると、鏡は光の進行方向の向きに運動量を受け取る。

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

を電磁場の運動量とよぶ。

（問）　自由空間を伝わる電磁波の場合の運動量について考察せよ。