２０１０年度版電磁気学４講義概要

京都大学物質—細胞統合システム拠点　教授　田中耕一郎

＜シラバス＞

１．真空中の Maxwell 方程式 I　　10 月 5 日
内容：真空中の Maxwell 方程式、ガウスの法則、アンペールの法則、ファラデーの法則、電荷の連続の式、波動方程式。Maxwell 方程式のフーリエ表示。平面波解。
２．真空中の Maxwell 方程式 II　10 月 12 日
内容：スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル、ローレンツゲージ、電磁場のエネルギー密度とエネルギー流、場の運動量と角運動量。
３．物質中の Maxwell 方程式 I　　10 月 19 日
内容:分極と磁化。物質中の Maxwell 方程式、ミクロな Maxwell 方程式と巨視的 Maxwell 方程式。
４．物質中の Maxwell 方程式 II　10 月 26 日
内容：物質中での平面電磁波、巨視的 Maxwell 方程式における物質場と応答関数、複素誘電関数とクラマース・クローニッヒ関係式、金属と表面インピーダンス。
５．物質中の Maxwell 方程式 III　11 月 9 日
内容：光と物質との相互作用のモデル化、ローレンツ振動子モデル、デバイモデル、電磁波の分散。位相速度と群速度。
６．物質中の電磁波 I　　11 月 16 日
内容：直線偏りと円偏り、ジョーンズベクトル、電磁場の境界条件。
７．物質中の電磁波 II　11 月 23 日
内容：反射と屈折。スネルの法則、反射係数、透過係数、エネルギー流の連続性。ブリュースター角、薄膜の透過率。
８．物質中の電磁波 III　11 月 31 日
内容：全反射。エバネッセント波とグースヘンシェンシフト、光のトンネル効果。空洞共振器。導波管。光ファイバー。
９．幾何光学　　12 月 7 日
内容：アイコナール近似。フェルマーの原理。スネルの法則。レンズ系。
１０．交流回路　　12 月 21 日
内容：インピーダンス、キルヒホッフの法則、はしご回路とフィルター、等価回路と特性インピーダンス。
１１．光の散乱と回折 I　　1 月 11 日
内容：回折のスカラー理論、キルヒホッフの積分公式、バビネの定理、フラウンホファー回折とフレネル回折。方形開口、円形開口による回折。
１２．光の散乱と回折 II　　1 月 18 日
内容:振動する局所的な湧き出しからの電磁放射、電気双極子放射、誘電率のゆらぎによる散乱、青空、臨界タンパク光。
１３．予備　1 月 25 日
内容：
１４．試験　2 月 1 日
内容：この日に試験を予定します。

1. 真空中の Maxwell 方程式 I

1-1.真空中の Maxwell 方程式

MKSA $\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = c^2$

基本的な場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (1.3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (1.4)$$

☆ (1,1)、(1,3)は Gauss の法則

例１. 真空中の点電荷による電場

(1,1)を点電荷でかこむ体積で積分

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{e}{\varepsilon_0}$$

積分形の Gauss の定理

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{e}{\varepsilon_0}$$

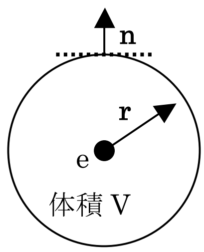
ここで A は V をとりかこむ閉曲面。球面の場合は面に垂直なベクトルは

$\mathbf{E} // \mathbf{n}$ （対称性から）となる。このとき、

$$4\pi r^2 |\mathbf{E}| = \frac{e}{\varepsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2} \qquad (1.5)$$

or $$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\mathbf{e_r}$$



例２. (1.3)はモノポール（単磁極）がないという証拠.

☆ 定常電流の場合のアンペールの法則

例３. 電流 I が流れている長い電線の外部の磁場 (1.4)で $\dfrac{\partial E}{\partial t} = 0$ と置いたもの.

→アンペールの法則

対称性の点から $\mathbf{B}$ は軸対称

(1.4)より　$c^2\int_A \nabla\times\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\eta}dA=\int_A\dfrac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0}\cdot\boldsymbol{\eta}dA$

$$c^2\int_\Gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\frac{I}{\varepsilon_0}$$

$$c^2|\mathbf{B}|2\pi r=\frac{I}{\varepsilon_0}$$

$$|\mathbf{B}|=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r}\quad(1.6)$$

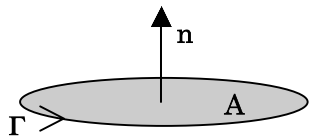
$$\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{2\mathbf{I}\times\mathbf{e_r}}{\mathrm{r}}\quad(1.7)$$

☆　誘導法則．ファラデーの法則.

(1.2)より

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\int_A \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dA=-\int_A\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}dA$$



□　(1.8)

↓A を通る磁束

$$\Phi=\int_A \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dA$$

閉回路を貫く磁束が時間変化すると起電力が生じる。

１－２.Maxwell の予想と電荷の連続の式

元々の方程式のアンペールの式(1.4)には $\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ の項がなかった。

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0}$$

これにはおかしい点がある。

$$\nabla\cdot\left(c^2\nabla\times\mathbf{B}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{i}=0\quad\text{（div・rot は常に 0）}$$

これは任意の閉曲を通る全電流が 0 を意味する。これはおかしい。電荷はあちこち動く。閉曲面内部から電荷がなくなるような場合に、$\nabla\cdot\mathbf{i}=0$ はおかしい。もし電荷が保存するのならば、連続の式

$$\nabla\cdot\mathbf{i}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\quad(1.9)$$

が成り立つべきである。これは“流れ”と“源”に間に成り立つ局所的保存則の１つである。

Maxwell はアンペールの法則を下の様に右辺に $\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ を付け加えるように提案した。

(1.4)→ $$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

両辺の div をとる。

$$0=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{i}+\nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{E})$$

(1.1)　の Gauss の法則より

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)=0$$

$$\therefore\quad \nabla\cdot\mathbf{i}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \qquad (1.9)$$

☆ アンペールの法則に加わった新しい項の効果.

例４． $\rho=0$、　$\mathbf{i}=0$　の場合の Maxwell 方程式

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \quad (1.1)'$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \quad (1.3)$$

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)'$$

源がなくても、$\mathbf{E}$ の変化が $\mathbf{B}$ の rot を生み出し、それの変化がさらに $\mathbf{E}$ の rot を生み出す。

誘電の法則からスタートする.

(1.2)→ $$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

両辺の（∇×　）をとる。

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\nabla\times\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} \qquad (1.10)$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

↑＝0　　　　　　↑ここがつけ加わった項

Gauss の法則

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}=0$$ 　波動方程式　(1.11)

源がなくても自立的に電場を振動し、伝播し続ける。→　電磁波

平面波解　$\tilde{\mathbf{E}}(r,t)=\tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$

１－３．　Maxwell 方程式のフリーエ成分表示

真空中の Maxwell 方程式　$\rho=0$　$\mathbf{i}=0$ の場合

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0 \qquad (1.1')$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (1.2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad (1.3)$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{i}}{c^2\varepsilon_0}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad (1.4)'$$

場　をフーリエ成分で書く。（平面波に分解する）

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k},\omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$

これ等を代入　　　　　微分と積分の順序の入れ換え

◎　時間微分　$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(2\pi)^4}\int \sim \quad d^3\mathbf{k}d\omega$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)(-i\omega)e^{i(\mathbf{\kappa}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$

◎　空間微分　　　　　微分と積分の順序の入れ換え

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}_x(\mathbf{r},t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\sim d^3\mathbf{k}d\omega$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int \widetilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial}{\partial x}e^{i(k_x x+k_Y y+k_Z z-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$

$$=\int \widetilde{E}_x(\mathbf{k},\omega)(ik_x)e^{i(\mathbf{kr}-\omega t\ )}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{E}_x(\mathbf{r},t)=\frac{\partial}{\partial y}\int \sim d^3kd\omega$$

$$=\int \widetilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k},w)(ik_y)e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$(\nabla\times\mathbf{E})_x=\frac{\partial\mathbf{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathbf{E}_y}{\partial z}$$

$$=\int\{\mathbf{k}_y\mathbf{E}_z(\mathbf{k},\omega)-i\mathbf{k}_z\mathbf{E}_y\ \}e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r}-i\omega t)}d^3\ \mathbf{k}d\omega$$

$$=\int i(\mathbf{k}\times\mathbf{E})_x e^{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$

同様に　$\nabla\cdot\mathbf{E}=\int i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$

これ等を Maxwell 方程式に代入して

$$\int i\mathbf{k}\cdot\ \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},w)e^{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega=0$$

$$\int i\mathbf{k}\times\ \widetilde{\mathbf{E}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega=-\int(-i\omega)\ \widetilde{\mathbf{B}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$

$$\int i\mathbf{k}\cdot\ \widetilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}\cdot\omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega=0$$

$$c^2\int i\mathbf{k}\times\ \widetilde{\mathbf{B}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega=\int(-i\omega)\ \widetilde{\mathbf{E}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3\mathbf{k}d\omega$$

これ等は任意の $\mathbf{r},t$ で成立するから、$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ の係数は 0 にならなければならない。

$$\mathbf{k}\cdot\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)=0 \tag{1.12}$$

$$\mathbf{k}\times\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)-\omega\widetilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k},\omega)=0 \tag{1.13}$$

$$\mathbf{k}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}\cdot\omega)=0 \tag{1.14}$$

$$c^2\mathbf{k}\times\widetilde{\mathbf{B}}\ (\mathbf{k}\cdot\omega)+\omega\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)=0 \tag{1.15}$$

① (1.12), (1.14) から $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ は波数 $\mathbf{k}$ に垂直（横波）

② (1.13)の左から $\mathbf{k}\times$

$$\mathbf{k}\times\left(\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}\right)-\omega\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{B}}=0$$

$$\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}}\right)-\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{k}^2+\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\mathbf{E}}=0 \qquad (\because (1.15))$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\mathbf{k}^2\right)\tilde{\mathbf{E}}\left(\mathbf{k}\cdot\omega\right)=0$$

$\tilde{\mathbf{E}}\left(\mathbf{k}\cdot\omega\right)\neq 0$ であれば → $\boxed{\omega = c\left|\mathbf{k}\right| \quad \text{分散関係式}}$ (1.16)

③ (1.13)から $\cdot\tilde{\mathbf{B}}=\dfrac{\mathbf{k}}{\omega}\times\tilde{\mathbf{E}}$ (1.17)

故に $\tilde{\mathbf{E}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{O}$ $\tilde{\mathbf{E}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}$ は垂直

$\mathbf{k}$ と $\tilde{\mathbf{E}}$ と $\tilde{\mathbf{B}}$ は互いに垂直（平面波解） この時、分散関係 $\omega = c\left|\mathbf{k}\right|$ を考慮すると、

$$\boxed{\therefore \quad \left|\mathbf{B}\right|=\frac{\mathbf{k}}{\omega}\left|\mathbf{E}\right|=\frac{1}{c}\left|\mathbf{E}\right|} \qquad (1.18)$$