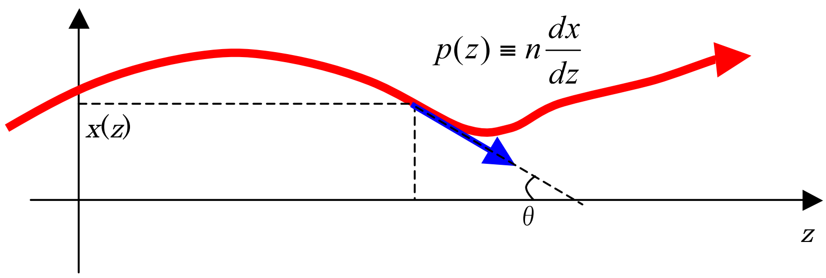
○ 幾何光学　補足

- ２つのレンズの焦点距離はどうやって求める？

(a) ABCD 行列によるガウス光学系の記述

光学系が光軸の周りに軸対称な系を考える。これをガウス光学系と呼ぶ。ガウス光学系での結像を考えるために、以下のような座標系を考える。ここで光軸を z 軸とする。



レンズなどの媒質で光線（図中の赤線）$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ が写像されていくと考える。[1]

ここで、 $p(z)$ は屈折率を考慮した波数であり、近軸近似（光軸と p のなす角が１より十分小さい）のもとで次のようにあたえられる。

すなわち、
$$p(z) \equiv n(z)\frac{dx}{dz} \cong n\theta \qquad (1)$$

写像として、次のような１次写像を考える。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ここで相反性[2]より、 $A = D$ 　かつ　$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1$ 　（３）

が成立する（Quiz 7)。ここで、行列 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ を ABCD 行列と呼ぶ。

例１． 屈折率 n の媒質中を z 方向に d だけ進む場合の ABCD 行列。

向きが変化しないから、 $p_1 = p_0$， $x_1 = x_0 + d\dfrac{dx}{dz} = x_0 + \dfrac{d}{n}p_0$ が成り立つ。

---

[1] 力学において、質点が位相空間（ｘ、ｐ）内を運動することに対応している。

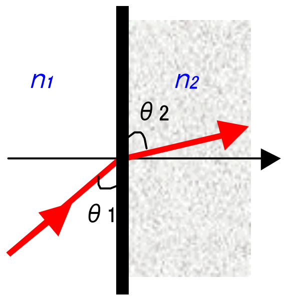
[2] 相反性：　逆向きに進む光線も同じ ABCD 行列で記述出来るものとする。

すなわち、（２－６１）の逆向き $\begin{pmatrix} x_0 \\ -p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ -p_1 \end{pmatrix}$ 　(4)

が成立するものとする。ここで光線は無機があるので、ｐの符号がマイナスであることに注意すること。

故に、
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

例２． 平面境界



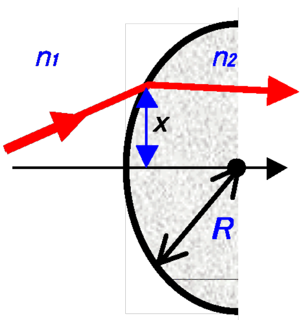
屈折率は p の中にすでに考慮されているので、近軸近似のもとで、

$$p_1 = n_2 \frac{dx}{dz} \approx n_2\theta_2 \approx n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1 \approx n_1\theta_1 = n_1 \frac{dx}{dz} = p_0$$

すなわち、$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ という空間では何も変化しないことになる。

故に、
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

例３． 球面境界



左図の表記で議論する。

$$\begin{aligned} p_1 &= -n_2 \frac{x}{s_2} = -x\left(\frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{s_1}\right) \\ &= -x\left(\frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{p_0}{x}\right) \\ &= p_0 - \left(\frac{n_2 - n_1}{R}\right)x \end{aligned}$$

となる。[3]　　これより、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

<u>ＱＵＩＺ</u>

1. 相反性が成り立つとき、

   $A = D$　かつ　$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1$　　であることを証明せよ。

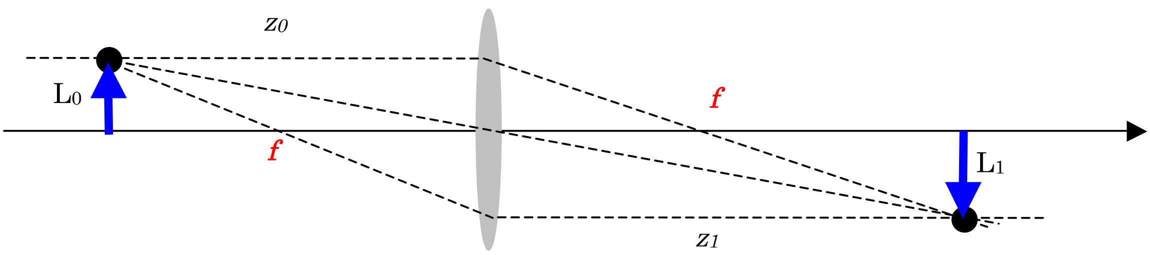
2. 焦点距離 f のレンズに対する ABCD 行列の表式を求めよ。

   （解）
   $$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

---

[3] 第一式のマイナス符号は球面境界の右側はマイナスの傾きであることに由来する。

（b）ABCD 行列による結像論



上図のようにレンズによって物体 L_0 を L_1 に結像させることを考える。
物体 L_0 から空中をとんでレンズに入射して、また空中を飛んで結像点に至る訳だから、ABCD 行列を使ってこの光線を記述すると、

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-\dfrac{z_1}{f} & z_0+z_1-\dfrac{z_0 z_1}{f} \\ -\dfrac{1}{f} & 1-\dfrac{z_0}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

このままだと、L_1 は α_0 に依存している。すなわち、L_0 を異なる向きに発した光は 1 点に集まらない。したがって α_0 の係数が 0 にならなければならない。

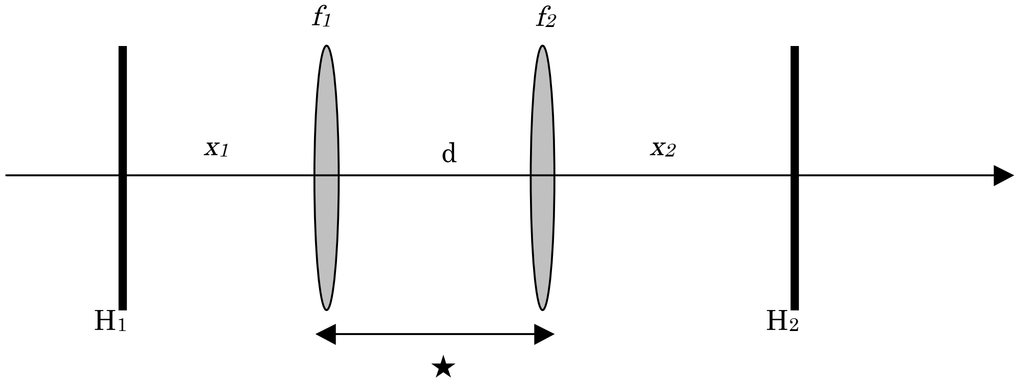
すなわち、$z_0 + z_1 - \dfrac{z_0 z_1}{f} = 0$ となる。これは、薄いレンズの公式に等価である。
この場合、ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{z_1}{z_0} & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & -\dfrac{z_0}{z_1} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

となる。この行列の意味するところは、1 つのレンズによる像は反転し、$\dfrac{z_1}{z_0}$ 倍に拡大されていることである。

（ｃ）組み合わせレンズへの応用

ABCD 行列をもちいて組み合わせレンズについて考える。
まず、図のような H_1 平面から H_2 平面にいたる ABCD 行列を求めてみよう。空間の屈折率は簡単のために 1 であるとする。



★ の部分の ABCD 行列をまず計算する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{d}{f_1} & d \\ -\dfrac{1}{F} & -\dfrac{d}{f_2}+1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

ただし、
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \tag{12}$$

H_1-H_2 全体の計算

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{d}{f_1} & d \\ -\dfrac{1}{F} & -\dfrac{d}{f_2}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\dfrac{d}{f_1}-\dfrac{x_2}{F} & x_1+x_2+d-\dfrac{dx_1}{f_1}-\dfrac{dx_2}{f_2}-\dfrac{x_1x_2}{F} \\ -\dfrac{1}{F} & 1-\dfrac{d}{f_2}-\dfrac{x_1}{F} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

x_1, x_2 は任意なので、この表式が薄いレンズと等価になることを要求する。
すなわち、対角要素が 1 であることから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{f_1} + \frac{x_2}{F} &= 1 \\ \frac{d}{f_2} + \frac{x_1}{F} &= 1 \end{aligned} \tag{14}$$

である。(13)の ABCD 行列の(1，2)成分に(14)を代入すると、0 であることがすぐに示せる。　まとめると、x_1, x_2 を(14)のように定めると、ABCD 行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

となる。これは、薄いレンズの公式と等価であることから、H_1-H_2全体として一つの薄いレンズとして考えればよいことがわかる。

この時、H_1およびH_2面を「主平面」とよぶ。したがって、複数の組のレンズに対しては、主平面を考え、主平面から、物体、像までの距離に対してレンズの公式を用いるとよい。

例１． ２つのレンズ（焦点距離 f_1、 f_2）を密接しておいた場合（d=0 に相当）の合成焦点距離 f を求めよ。

（解）（２－６７）より、$\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}$である。（２－７３）より、$x_1, x_2$はゼロになるからレンズの位置が主平面になる。

（別解）行列$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$を計算する。

例２． $f_1 = f_2 = 10$ [cm], d=40 [cm] の２つのレンズの組を考える。合成焦点距離 F および主平面はどうなるか？　物体の主平面H_1からの距離を 10 [cm]とすると、主平面 H_2からどの位置に像は結像するか？　それはどのような像か？

（略解）F = -5 [cm], 主平面はレンズから左右に 20 [cm]。主平面 H_2から内側に 3.3 [cm]のところに正立像が結像する。

Ｑ Ｕ Ｉ Ｚ（その２）

3. H_1-H_2平面の ABCD 行列が

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}$$ であることを証明せよ。

ただし、F、x_1, x_2は（12)、（14）であたえられるものとする。

4. ３つの焦点距離の同じレンズを考え、互いに d の間隔でおく。
このときの主平面および合成焦点距離を求めよ。